

Citation: Hirt (2009) Hochauflösende astrogeodätische Bestimmung von Geoid- und Äquipotentialprofilen mit Submillimetergenauigkeit für die Vermessung von Teilchenbeschleunigern. *Allgemeine Vermessungsnachrichten* (AVN) 2/2009: 48-63.

# Hochauflösende astrogeodätische Bestimmung von Geoid- und Äquipotentialprofilen mit Submillimetergenauigkeit für die Vermessung von Teilchenbeschleunigern

Christian Hirt

**Zusammenfassung:** Der Beitrag behandelt die hochgenaue und hochauflösende Bestimmung der Geometrie von Äquipotentialprofilen des Erdschwerefeldes unter Anwendung des astronomischen Nivellements. Die bekannte Theorie des astronomischen Nivellements für die Geoidbestimmung wird einführend zusammengefasst und für die Bestimmung von Äquipotentialprofilen, die in verschiedenen Höhen zwischen Erdoberfläche und Geoid verlaufen, modifiziert. Im Mittelpunkt steht dabei die Berechnung der orthometrischen Korrektur. Es werden Ergebnisse einer lokalen räumlich hochauflösenden Schwerefeldbestimmung mit hochgenauen Lotabweichungsdaten in Norddeutschland vorgestellt. Der verwendete Datensatz besteht aus etwa 140 Lotabweichungsstationen, die in kurzen Abständen von 50 m entlang eines 7 km langen Profils mit einem digitalen Zenitkamerasystem beobachtet wurden. Es wird gezeigt, dass das astronomische Nivellement in der Praxis dazu geeignet ist, die Geometrie von Äquipotentialprofilen auf einem Genauigkeitsniveau von etwa 0.1 mm über 1 km Entfernung für lokale Aufgabenstellungen bereitzustellen. Dieses Genauigkeitsniveau ist erreichbar, wenn Lotabweichungsdaten mit einer Genauigkeit von etwa 0.1" in kurzen Abständen vorliegen und in nicht besonders refraktiven Messumgebungen erfasst wurden. Anwendungen für das Submillimeter-Genauigkeitsniveau ergeben sich im Bereich des Anlagenbaus im Zusammenhang mit der Justierung zukünftiger Teilchenbeschleuniger.

## 1. Einleitung

Die genaue Kenntnis der Geometrie des Erdschwerefeldes ist für viele Bereiche in den Ingenieur- und Geowissenschaften von Bedeutung und nimmt eine zentrale Stellung im Zusammenhang mit der Höhenbestimmung ein. Während sich die Genauigkeit der lang- und mittelwelligen Anteile des Erdschwerefeldes (Wellenlängen von 20000 km – einige 100 km) in den letzten Jahren durch die Schwerefeld-Satellitenmissionen CHAMP und GRACE signifikant verbessert hat, und die Eigenschaften der mittel- und kurzwelligen Anteile (einige 100 km – etwa 2 km) im Wesentlichen durch die gravimetrische Schwerefeldmodellierung (z.B. Denker 1988, Marti 1997, Gerlach 2003, Denker 2006) gut bekannt sind, war die Erfassung und Untersuchung der Feinstruktur des Erdschwerefeldes (ultrakurze Wellenlängen von etwa 1 – 2 km und kürzer) bisher eher selten Gegenstand der geodätischen Forschung.

Aktuelle Geoid- oder Quasigeoidmodelle (z.B. das German Combined Quasigeoid GCG05 in Deutschland, Liebsch et al. 2006 oder das Modell CHGeo2004 für die Schweiz, Marti und Schlatter 2005) stellen Geoid- bzw. Quasigeoidhöhen typischerweise mit einer räumlichen Auflösung im km-Bereich (1 – 2 km Rasterweite) zur Verfügung. Als Genauigkeit der GCG05-Quasigeoidhöhen wird 1 – 2 cm angegeben (BKG 2005). Die Genauigkeit von Quasigeoidhöhendifferenzen aus dem GCG05-Modell kann im Bereich weniger Millimeter über einige 10 km liegen (Hirt et al. 2008). Mit der Verfügbarkeit des GCG05 werden in Deutschland insbesondere die Anforderungen an die Gebrauchshöhenbestimmung mit GPS im Zentimeterbereich abgedeckt.

Bei Spezialanwendungen in der Ingenieurgeodäsie und im Anlagenbau, die höchste Genauigkeiten für die Erfassung der Feinstruktur des Erdschwerefeldes erfordern, stößt die Nutzung von regionalen Geoid- und Quasigeoidlösungen aufgrund begrenzter räumlicher Auflösungen oftmals an ihre Grenzen. So sind beispielsweise mit dem Neubau geplanter

Teilchenbeschleuniger Forderungen verbunden, die Gestalt des Schwerefeldes (Geometrie von Äquipotentialflächen) profilweise mit einer Genauigkeit von 0.1 mm (und besser) über Distanzen von einigen 100 m zu erfassen (Abschnitt 2). Aufgrund einfacher Überlegungen zur Signalabtastung ist die Beobachtung von Schwerefeldfunktionalen wie Lotabweichungen oder Schwerebeschleunigung in einem entsprechend dichten Raster (z.B. 100 m Auflösung oder weniger) notwendig, um die erforderliche Information adäquat zu erfassen. Auf eine derart hohe Datendichte kann bei der Berechnung regionaler Geoid- und Quasigeoidlösungen im überwiegenden Teil des Berechnungsgebietes jedoch nicht zurückgegriffen werden (vgl. z.B. Denker 1988, 2006).

Eine Möglichkeit zur Erfüllung außergewöhnlich hoher Genauigkeitsanforderungen an die lokale Schwerefeldbestimmung besteht in der Anwendung des astronomischen Nivellements (Helmert 1884). Bei diesem klassischen Verfahren werden Lotabweichungen entlang eines Verbindungsweges zwischen zwei oder mehreren Punkten integriert, um die Geometrie von Äquipotentialflächen des Erdschwerefeldes zu bestimmen. Eine hohe räumliche Auflösung ist dabei durch dichte Anordnung der Lotabweichungsstationen auf einfache Weise erreichbar. Die Verwendung von Lotabweichungen hat Vorteile gegenüber einer gravimetrischen Modellierung nach Stokes, bei der eine flächenhafte Verteilung von Schwerewerten notwendig ist (z.B. Torge 2003, S. 256 ff) und daher auch Fehlereinflüsse aus angrenzenden, weniger dicht erfassten Gebieten eine Rolle spielen können. Als Nachteil der astrogeodätischen Methode ist die Wetterabhängigkeit der Lotabweichungsmessung zu nennen.

Durch die Entwicklung leistungsfähiger digitaler Zenitkamarasysteme zur wirtschaftlichen Lotabweichungsbestimmung an der Eidgenössischen Technischen Hochschule (ETH) Zürich (Bürki et al. 2004) und an der Leibniz Universität Hannover (Hirt 2004) ist die astrogeodätische Schwerefeldbestimmung in den letzten Jahren in den Blickpunkt der geodätischen Forschung gerückt. Aufgrund vollständiger Automatisierung der astrogeodätischen Beobachtung und Datenprozessierung ist es mit einem digitalen Zenitkamarasystem möglich, die Lotabweichung einer einzelnen Station mit etwa 20 minütiger Beobachtungsdauer zu bestimmen. Mit digitalen Zenitkamarasystemen wird üblicherweise ein Genauigkeitsniveau von 0.08" bis 0.10" für die Lotabweichungsdaten erreicht (Hirt und Seeber 2008, Hirt et al. 2008), was gegenüber konventionellen astrogeodätischen Instrumenten eine deutliche Verbesserung bedeutet (z.B. Seeber und Torge 1985).

Bereits vor einigen Jahren hat sich angedeutet, dass das astronomische Nivellement mit digitalen Zenitkamarasystemen aufgrund der erreichbaren Beobachtungsgenauigkeit und Wirtschaftlichkeit für die Lotabweichungsmessung dazu genutzt werden kann, den ultrakurzen Wellenlängenbereich des Erdschwerefeldes zu erschließen und Schwerefeldbestimmungen auf dem Millimeter- und Submillimeterniveau zu ermöglichen (z.B. Hirt 2004). Seit 2005 wurde daher das in Hannover entwickelte digitale Zenitkamarasystem TZK2-D (Transportable Zenitkamera 2 – Digitalsystem) zur Messung neuartiger Lotabweichungsdatensätze in dichter Stationsanordnung mit den Zielsetzungen angewendet, die Feinstruktur des Erdschwerefeldes hochgenau zu erfassen und Erfahrungswerte hinsichtlich der praktisch erreichbaren Genauigkeiten zu gewinnen.

In diesem Beitrag werden die endgültigen Resultate einer hochauflösenden lokalen astrogeodätischen Schwerefeldbestimmung vorgestellt, die in den Jahren 2005 und 2006 im Testgebiet Steinhude bei Hannover über einem Salzstock durchgeführt wurde. Nach der Veröffentlichung erster Teilergebnisse während der Projektdurchführung (Hirt und Seeber

2005) wurden etwa 140 Stationen zur Ableitung von Genauigkeitsaussagen ein zweites Mal astrogeodätisch bestimmt. Der resultierende Lotabweichungsdatensatz ist einerseits aufgrund der hohen räumlichen Auflösung von 50 m über 7 km Profillänge, andererseits aufgrund der doppelten Bestimmung nahezu aller Lotabweichungsstationen einzigartig.

Neben theoretischen Überlegungen zur Anwendung des astronomischen Nivellements für die Bestimmung von Geoid- und Äquipotentialprofilen (Abschnitt 3) werden empirische Nachweise der erreichten Genauigkeit für die gemessenen Lotabweichungen und daraus berechneten Äquipotentialprofilen des Erdschwerefeldes gegeben (Abschnitt 4). Der Beitrag weist nach, dass Submillimetergenauigkeit über kurze Entfernungen von einigen Kilometern erreichbar ist und hohe Genauigkeitsanforderungen aus dem Bereich des Anlagenbaus – insbesondere im Zusammenhang mit der Justierung neuer Teilchenbeschleuniger – erfüllt werden können. Bei der zukünftigen Nutzung des astronomischen Nivellements zur Schwerefeldbestimmung mit Submillimetergenauigkeit spielen die Aspekte der *Refraktion* (Abschnitt 4.3) und die *orthometrische Korrektur* (Abschnitt 3 und 4.4) eine besondere Rolle.

## **2. Anforderungen an die Schwerefeldbestimmung bei der Justierung geplanter Teilchenbeschleuniger**

Seit einiger Zeit ist der Neubau von linearen Teilchenbeschleunigern in der Diskussion. Im Jahr 2007 publizierte das Internationale Komitee für zukünftige Beschleuniger (ICFA) einen Referenz-Design-Report (RDR) für den Internationalen Linearbeschleuniger (International Linear Collider ILC), in dem die technischen Grundlagen für den geplanten Neubau eines 31 km langen Linearbeschleunigers zusammengestellt sind (ILC 2007, DESY 2007a,b). In der Schweiz wird ebenfalls seit einigen Jahren der Neubau eines Linearbeschleunigers (Compact Linear Collider CLIC am CERN in Genf) diskutiert. Bereits vor einigen Jahren wurden mit dem Linearbeschleuniger TESLA (angesiedelt beim Deutschen Elektronen-Synchrotron DESY in Hamburg) und dem US-amerikanischen Beschleuniger NLC (Next Linear Collider, angesiedelt am Stanford Linear Accelerator Center SLAC) Zukunftsprojekte der Hochenergiephysik geplant, die allerdings aus Kostengründen nicht realisiert werden konnten. Mit dem Neubau geplanter linearer Teilchenbeschleuniger werden außergewöhnlich hohe Genauigkeitsanforderungen hinsichtlich der Lage- und Höhenvermessung gestellt (z.B. Schwarz 1998). Diese werden nachfolgend für die aktuell wie auch in der Vergangenheit geplanten Linearbeschleunigerprojekte zusammengestellt, da erwartet werden kann, dass ähnliche Anforderungen zukünftig – beim tatsächlichen Neubau eines Beschleunigers – von der Geodäsie erfüllt werden müssen.

Allen vier Projektvarianten (ILC, CLIC, TESLA und NLC) ist gemein, dass die geplanten Beschleunigerlängen etwa 30 km betragen und gewisse Nachbarschaftsgenauigkeiten in beliebigen Bereichen von einigen 100 m Länge eingehalten werden müssen, um die Komponenten des Strahlweges justieren zu können. Je nach geplanter Beschleunigertechnologie ergeben sich verschiedene Genauigkeitsanforderungen. Für das Vorhaben NLC werden Relativgenauigkeiten von 0.1 mm über 150 m und 1 mm über 1000 m angesetzt (Ruland, 2003). Für den TESLA-Beschleuniger betragen die erforderlichen Nachbarschaftsgenauigkeiten 0.5 mm in der Lage und 0.2 mm in der Höhe über 600 m Distanz (Schlösser und Herty, 2002, Schwarz 2007). Im Zusammenhang mit dem Neubau vom CLIC werden noch höhere Genauigkeiten von 0.01 mm über 200 m genannt, die für die Justierung erforderlich sind (Becker et al. 2002). Für das Zukunftsvorhaben International Linear Collider werden Justiergenauigkeiten von 0.2 mm über 200 m mitgeteilt (ILC 2007). Die erforderlichen Höhengenaugigkeiten für die verschiedenen Beschleuniger sind in Tab. 1 zusammengefasst.

Zum Erreichen der geforderten hohen Genauigkeiten für die Höhenkomponente ist geplant, hochgenaue Schlauchwaagensysteme mit Ultraschalltechnik im Beschleunigertunnel einzusetzen (siehe z.B. Schwarz 1998, Becker et al. 2002, Schlösser und Herty 2002, Schlösser 2004, Schwarz 2007). Durch Nutzung von Schlauchwaagen ist die abgeleitete Höheninformation auf die Äquipotentialfläche in Höhe der Flüssigkeitsoberfläche bezogen. Für die Justierung der Beschleuniger werden jedoch *geometrisch* definierte Höhen benötigt, die sich auf eine streng regelmäßige geometrische Referenz, wie z.B. ein Ellipsoid, beziehen (Becker et al. 2002). Informationen zur Geometrie der Äquipotentialfläche sind folglich notwendig, um innerhalb der genannten Justiergenauigkeiten etwaige Undulationen (Wellen) der Flüssigkeitsoberfläche zu korrigieren, die ihre Ursache in der lokalen Feinstrukturierung des Erdschwerefeldes haben (Becker et al. 2002). Anderenfalls können beispielsweise Resonanzeffekte entstehen, die den Betrieb des Beschleunigers erschweren.

Aus diesen Überlegungen resultieren folgende Anforderungen an die Bestimmung des Erdschwerefeldes. Benötigt wird ein Verfahren, das die Geometrie des *Äquipotentialprofils entlang der Schlauchwaage in Höhe des Beschleunigertunnels* bereitstellt. Im Fall von TESLA beispielsweise soll die Genauigkeit des Äquipotentialprofils mindestens 0.2 mm über 600 m betragen. Während die Unsicherheit der Schlauchwaagenablesung (kleiner als 20 µm, Schlösser 2004) eine untergeordnete Rolle spielt, müssen die Unsicherheiten der *Höhenübertragung von der Schlauchwaage auf die Beschleunigerkomponenten* noch zusätzlich im Fehlerbudget der Höhenbestimmung berücksichtigt werden. An die lokale Schwerefeldbestimmung werden folglich höhere Genauigkeitsanforderungen gestellt, als in Tab. 1 angegeben. Das anzuwendende Verfahren muss in der Lage sein, die geforderte Genauigkeit für den ultrakurzwelligen Spektralbereich des Erdschwerefeldes (Anteile mit Wellenlängen von einigen 100 m bis etwa 1.2 km, entsprechend der doppelten Distanz von 600 m) zu gewährleisten. Von Bedeutung ist die Frage, mit welchen Amplituden ultrakurzwellige Anteile des Erdschwerefeldes überhaupt auftreten können. Weitere Bedeutung kommt der Fragestellung zu, wie und mit welcher Genauigkeit die im Regelfall an der Erdoberfläche erfasste Geometrie des Erdschwerefeldes in den unterirdischen Tunnel auf das Niveau der Schlauchwaage übertragen werden kann. In diesem Zusammenhang ist relevant, dass oberflächennahe Projektvarianten (sogenannte *Shallow Sites*) diskutiert werden, bei denen der Beschleunigertunnel etwa 10 m unterhalb der Erdoberfläche verläuft, sowie *Deep Sites*, wo der Beschleuniger in einer Tiefe von etwa 100 m installiert wird (DESY 2007a).

### 3. Das astronomische Nivellement

#### 3.1 Theorie

Mit dem astronomischen Nivellement ist eine Methode zur lokalen Schwerefeldbestimmung (Geoid, Quasigeoid, Äquipotentialflächen) verfügbar, die hohe Anforderungen hinsichtlich Genauigkeit und räumlicher Auflösung erfüllen kann. Das Verfahren wird häufig zur profilweisen Schwerefeldbestimmung genutzt, kann jedoch auch flächenhaft angewendet werden (z.B. Galle 1914, Daxinger 1996, Marti 1997). Zentrale Messgröße ist die (Helmertsche) Lotabweichung, die sich als Differenz der astronomischen Koordinaten (Lotrichtungssparameter Breite  $\Phi$  und Länge  $\Lambda$ ) und geodätischen Koordinaten (ellipsoidische Breite  $\varphi$  und Länge  $\lambda$ ) an der Oberfläche ergibt (z.B. Torge 2003, S. 200):

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi - \varphi, \\ \eta &= (\Lambda - \lambda) \cos\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Komponenten  $\xi$  und  $\eta$  sind vom Bezugsellipsoid abhängig, auf das sich die geodätischen Koordinaten  $(\varphi, \lambda)$  beziehen. Im Beobachtungspunkt gibt die Komponente  $\xi$  die Neigung der Äquipotentialfläche gegenüber dem Ellipsoid in Nord-Süd-Richtung und  $\eta$  die Neigung in Ost-West-Richtung an. Für die Lotabweichung in Richtung eines beliebigen (Nord-) Azimuts  $\alpha$  folgt:

$$\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha. \quad (2)$$

Die Höhenänderung des Äquipotentialprofils  $\Delta N_{12}^{eq}$  gegenüber dem Ellipsoid ergibt sich zwischen zwei dicht benachbarten Punkten 1 und 2 zu (vgl. Abb. 1):

$$\Delta N_{12}^{eq} \approx - \varepsilon_{12} \cdot ds, \quad (3)$$

wobei  $ds$  den Abstand der beiden Punkte 1 und 2 bezeichnet und die orthometrische Korrektur zunächst vernachlässigt wurde. Das Azimut  $\alpha$  und der Stationsabstand  $ds$  werden aus den geodätischen Koordinaten der beiden benachbarten Stationen berechnet. Die mittlere Lotabweichung  $\varepsilon_{12}$  entlang des Profilstücks  $ds$  ergibt sich durch lineare Interpolation zwischen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ :

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (4)$$

### 3.1.1 Geoidberechnung

Zur Berechnung des *Geoidverlaufes*  $\Delta N_{1n}$  zwischen zwei entfernten Punkten 1 und  $n$  werden Lotabweichungen  $\varepsilon$  an der Oberfläche entlang eines Verbindungsweges integriert (Torge 2003, S. 269):

$$\Delta N_{1n} = - \int_1^n \varepsilon \cdot ds - E_{1n}^O. \quad (5)$$

Die Größe  $E_{1n}^O$  wird als orthometrische Korrektur bezeichnet. Da Lotabweichungen  $\varepsilon$  in der Praxis nur an diskreten Punkten vorliegen, wird das Wegintegral in (5) zur praktischen Auswertung durch eine endliche Summe ersetzt:

$$\Delta N_{1n} \approx - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_{i,i+1} \cdot ds_{i,i+1} - E_{1n}^O \quad (6)$$

mit  $\varepsilon_{i,i+1}$  mittlere Lotabweichung entlang des Streckenstückes  $ds_{i,i+1}$  zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Stationen  $i$  und  $i+1$ . Die Auswertung von (6) erfordert einen quasikontinuierlichen Satz an Lotabweichungen an der Oberfläche, so dass die Mittelbildung in (4) zu repräsentativen Werten für die Lotabweichung  $\varepsilon_{i,i+1}$  zwischen je zwei benachbarten Punkten führt. Zur Anwendung des astronomischen Nivellements müssen die Lotabweichungsstationen nicht in einer Geraden angeordnet sein; eine kreisförmige Anordnung oder ein beliebiger anderer Verbindungsweg ist ebenso möglich. Damit ist das Verfahren sowohl zur Schwerefeldbestimmung für Linearbeschleuniger als auch für Kreisbeschleuniger anwendbar.

Um das *Geoid als Äquipotentialfläche in Höhe des mittleren Meeresspiegels* zwischen den Punkten 1 und  $n$  zu berechnen, ist es erforderlich, die Krümmung  $\delta\varepsilon$  der physikalischen Lotlinien zwischen der Oberfläche und dem Geoid zu korrigieren (z.B. Torge 2003, S. 268; Heiskanen und Moritz 1967, S.193). Dies kann entweder durch Korrektur der astronomischen Koordinaten ( $\Phi$ ,  $\Lambda$ ) mit der Lotkrümmung geschehen (z.B. Zomorrodian 1968, Ledersteger, 1969) oder – äquivalent – durch Berücksichtigung der *orthometrischen Korrektur*  $E_{1n}^O$  (Torge 2003, S. 228):

$$E_{1n}^O = \int_1^n \frac{g - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} dn + \frac{\bar{g}_1 - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} H_1 - \frac{\bar{g}_n - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} H_n . \quad (7)$$

Es bedeuten:  $g$  Oberflächenschwere,  $\gamma_0^{45}$  Normalschwere bei  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\bar{g}_1, \bar{g}_n$  mittlere Schwerewerte entlang der Lotlinien der Punkte 1 und  $n$ ,  $dn$  Höhenunterschied benachbarter Stationen und  $H_1, H_n$  (orthometrische) Höhen der Punkte 1 und  $n$  über dem Geoid.

Herleitungen von (7) finden sich z.B. in Helmert (1900), S. 974; Heiskanen und Moritz (1967), S. 167 f, Wirth (1990), S. 67 und Heck (1995), S. 304 f.

Die orthometrische Korrektur hat ihre Ursache in der Nichtparallelität der Äquipotentialflächen des Erdschwerefeldes (siehe Abb. 1) und ist auch im Zusammenhang mit der Überführung nivellierter Höhen in orthometrische Höhensysteme bekannt. Mit dem ersten Term in (7) wird der Einfluss der Lotkrümmung entlang des Weges mit an der Oberfläche gemessenen Schwerewerten berücksichtigt. In der Literatur wird das Integral als *dynamische Korrektur* (Heiskanen und Moritz, 1967, S. 163) oder *potentielle Wegreduktion* (Jung 1957, S. 108, Schlatter 2007, S. 22) bezeichnet. Sie entspricht dem (negativen) *theoretischen Schleifenschlussfehler* beim geometrischen Nivellement (z.B. Wirth 1990, S. 41; Heck 1995, S. 312). Für die Berechnung des zweiten und dritten Anteils in (7) sind Informationen über die Lotlinien (*Länge* sowie *mittlere Schwerewerte*) auf dem Anfangs- und Endpunkt notwendig. Die beiden Anteile tragen der Lotkrümmung entlang der beiden Lotlinien Rechnung. Sie entsprechen der *dynamischen Korrektur entlang der Lotlinie* (Heiskanen und Moritz 1967, S. 168) und sind auch als *vertikale potentielle Reduktion* (z.B. Jung 1957, S. 108) bekannt.

Für die praktische Berechnung wird das Integral in (7) durch eine endliche Summe ersetzt. Es ist zudem sinnvoll, den zweiten und dritten Term in die Summenanweisung einzuschließen, damit die orthometrische Korrektur auch an allen Zwischenpunkten  $i$  des Profils (bezogen auf den Profilanfang 1) quasikontinuierlich zur Verfügung steht und nicht nur als einzelner Korrekturwert zwischen Profilanfang 1 und –ende  $n$ . Es ergibt sich:

$$E_{1n}^O \approx \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{g_{i,i+1} - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} dn_{i,i+1} + \frac{\bar{g}_i - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} H_i - \frac{\bar{g}_{i+1} - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} H_{i+1} \right) . \quad (8)$$

Die Oberflächenschwere  $g_{i,i+1}$  kann aus den Schwerewerten  $g_i, g_{i+1}$  von je zwei ausreichend dicht benachbarten Stationen  $i$  und  $i+1$  berechnet werden:

$$g_{i,i+1} = \frac{1}{2}(g_{i+1} + g_i), \quad (9)$$

$$dn_{i,i+1} = (H_{i+1} - H_i). \quad (10)$$

Die Höhenunterschiede  $dn_{i,i+1}$  zwischen benachbarten Stationen sowie die Stationshöhen  $H_i$  über dem Geoid (Längen der Lotlinien) werden mit Verfahren der Höhenmessung ermittelt oder können ggf. aus hochauflösenden DGM-Daten interpoliert werden, da Höhengenaugigkeiten im Bereich von einigen dm bis etwa 1 m für die präzise Auswertung von (8) genügen. Eine direkte Messung der benötigten Oberflächenschwerewerte  $g_i$  ist nicht notwendig, wenn Schwerewerte auf Grundlage von Datenbanken mit ausreichender Genauigkeit (etwa 1 mgal) prädiiziert werden können (siehe hierzu auch Abschnitt 4.4 sowie Hirt et al. 2008).

Die Schwierigkeit bei der Auswertung des zweiten und dritten Terms in (7) bzw. (8) besteht darin, repräsentative mittlere Schwerewerte  $\bar{g}_i$  entlang der Lotlinien anzugeben. Dazu müsste man die Schwere entlang der Lotlinie (z.B. in einem Schacht vom Oberflächenpunkt bis zum Geoid) in kurzen Vertikalabständen messen und mitteln. Da dies in der Praxis in aller Regel nicht möglich ist, erfolgt die Berechnung der mittleren Schwerewerte über *Dichtehypothesen*. Bei Annahme einer Gesteinsdichte von  $2670 \text{ kg/m}^3$  und weitgehend ebener Geländegehalt ergibt sich eine häufig benutzte Näherungsformel für die Berechnung der mittleren Schwere  $\bar{g}_i$  entlang der Lotlinie (Torge S. 229):

$$\bar{g}_i = g_i + 0.424 \cdot 10^{-6} [\text{s}^{-2}] \cdot H_i \quad (11)$$

mit  $g_i$  Oberflächenschwere in  $[\text{m/s}^2]$ ,  $H_i$  Höhe der Station (über der Äquipotential- bzw. Höhenbezugsfläche) in  $[\text{m}]$ . Eine Formeldarstellung zur Berechnung der mittleren Schwere  $\bar{g}_i$  unter Berücksichtigung der lokalen Topographie findet sich in Wirth (1990), S. 58.

### 3.1.2 Quasigeoidberechnung

Ist der Verlauf des *Quasigeoids* gefordert, so wird in Gl. (6) statt der orthometrischen Korrektur  $E_{1n}^O$  die *normale Korrektur*  $E_{1n}^N$  angebracht, die ohne Dichtehypothesen mit der mittleren Normalschwere und gemessenen Oberflächenschwerewerten berechnet wird (Torge 2003, S.100 und S. 228). Ausführungen zur Berechnung der normalen Korrektur finden sich z.B. in Gerlach (2003) und eine Beschreibung einer astrogeodätischen Quasigeoidberechnung aus profilweise vorliegenden Lotabweichungsdaten wird beispielsweise von Hirt et al. (2008) gegeben. Da das Quasigeoid keine Äquipotentialfläche des Erdschwerfeldes darstellt, ist es für die in Abschnitt 2 beschriebene Aufgabenstellung nicht von Bedeutung und soll hier nicht weiter behandelt werden.

### 3.1.3 Berechnung von Äquipotentialprofilen

Unter Äquipotentialprofilen werden Profilschnitte durch Flächen gleichen Potentials des Erdschwerfeldes verstanden, also solche Flächen, die eine ruhende Wasseroberfläche in einer bestimmten Höhe bilden würde. Für die Berechnung von Äquipotentialprofilen, die in anderen Höhen als auf dem Niveau des mittleren Meeresspiegels verlaufen, ist es notwendig, die Berechnung der orthometrischen Korrektur zu modifizieren. In (8) wurden die Höhen  $H_i$  der Profilverpunkte auf das Niveau des Geoids bezogen, um dem Einfluss der Krümmung der physikalischen Lotlinien zwischen Oberfläche und Geoid Rechnung zu tragen. Für die Berechnung in einer anderen Höhe als dem Geoid müssen die Stationshöhen und damit die Lotlinienlängen auf das Äquipotentialprofil bezogen werden. Für die Bestimmung eines Äquipotentialprofils, das zwischen der Erdoberfläche und dem Geoid in einem Abstand  $\Delta H_I$



über dem Geoid am Anfangspunkt 1 verläuft (siehe Abb. 1 und 2), ergibt sich als *modifizierte orthometrische Korrektur*:

$$E_{1n}^{eq(\Delta H_1)} \approx \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{g_{i,i+1} - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} dn_{i,i+1} + \frac{\bar{g}_i - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} (H_i - \Delta H_1) - \frac{\bar{g}_{i+1} - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} (H_{i+1} - \Delta H_1) \right) \quad (12)$$

mit

$$\bar{g}_i = g_i + 0.424 \cdot 10^{-6} [\text{s}^{-2}] \cdot (H_i - \Delta H_1) \quad (13)$$

zur Berechnung der mittleren Schwerewerte  $\bar{g}_i$  entlang der Lotlinien der Profilverpunkte. Für die Berechnung der Geometrie des Äquipotentialprofils folgt aus (6):

$$\Delta N_{1n}^{eq(\Delta H_1)} \approx - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_{i,i+1} \cdot ds_{i,i+1} - E_{1n}^{eq(\Delta H_1)}. \quad (14)$$

Der hochgestellte Index  $eq(\Delta H_1)$  gibt an, dass das Äquipotentialprofil entlang der Lotlinie im Stationspunkt 1 einen vertikalen Abstand von  $\Delta H_1$  vom Geoid hat. Mit den angegebenen Formeln können prinzipiell auch *Äquipotentialprofile unterhalb des Geoides* (z.B. für Ingenieurprojekte in Küstennähe) berechnet werden, solange die in (13) enthaltene Dichtehypothese von  $2670 \text{ kg/m}^3$  die tatsächlichen Gesteinsdichten ausreichend annähert. Es soll darauf hingewiesen werden, dass sich der Abstand  $\Delta H_1$  an anderen Stationen des Profils aufgrund der Nichtparallelität der Äquipotentialflächen ändert. Streng genommen müsste man in (12) daher jede Stationshöhe  $H_i$  um den zugehörigen Abstand  $\Delta H_i$  korrigieren, den das Äquipotentialprofil an der Station  $i$  gegenüber dem Geoid aufweist. Dies kann durch iterative Auswertung erreicht werden, also Korrektur des Abstandes  $\Delta H_1$  mit  $E_{1n}^{eq(\Delta H_1)}$ . Da an die zu verwendenden Höhen bei der Berechnung der orthometrischen Korrekturen (8) bzw. modifizierten orthometrischen Korrektur (12) jedoch keine hohen Genauigkeitsanforderungen gestellt werden und die Korrektursterme nicht größer als mm-cm werden (Torge 2003, S. 228), ist eine solche iterative Auswertung aus Sicht der Praxis nicht erforderlich.

Mit Gl. (12) bis (14) gelingt es beispielsweise, die Geometrie des Äquipotentialprofils zu berechnen, das in Höhe des Anfangspunktes 1 *an der Oberfläche* verläuft, also  $\Delta H_1 = H_1$ :

$$\Delta N_{1n}^{eq(H_1)} \approx - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_{i,i+1} \cdot ds_{i,i+1} - E_{1n}^{eq(H_1)}, \quad (15)$$

$$E_{1n}^{eq(H_1)} \approx \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{g_{i,i+1} - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} dn_{i,i+1} + \frac{\bar{g}_i - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} (H_i - H_1) - \frac{\bar{g}_{i+1} - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} (H_{i+1} - H_1) \right). \quad (16)$$

Die vertikale potentielle Reduktion auf dem Anfangspunkt 1 verschwindet in diesem Fall. Ist das Gelände zudem weitgehend eben (also  $dn_{i,i+1} \approx 0 \text{ m}$  und damit  $H_1 \approx H_i$ ), so nimmt die modifizierte orthometrische Korrektur  $E_{1n}^{eq(H_1)}$  einen Wert von 0 mm an und die Geometrie des Äquipotentialprofils ergibt sich direkt aus den numerisch integrierten Lotabweichungen.

Gl. (12) bis (14) sind von unmittelbarer Bedeutung für die in Abschnitt 2 beschriebene Aufgabenstellung. Diese verlangt, dass die an der Erdoberfläche erfassten Lotabweichungen

auf das tieferliegende Niveau des Beschleunigtunnels übertragen werden. Der Niveauunterschied kann je nach Projektvariante in den Größenordnungen von 10 m oder 100 m liegen (DESY 2007a). Die Berechnung des Äquipotentialprofils in Höhe des Beschleunigtunnels bzw. der Schlauchwaage kann erfolgen, wenn in (12) und (13) die Höhen der Oberflächenpunkte  $H_i$  auf das Niveau der Schlauchwaage (und *nicht* auf das Geoid) bezogen werden, das um  $\Delta H_1$  über dem Geoid liegt (vgl. Abb. 2):

$$\Delta H_1 = H_1 - H_1^* \quad (17)$$

mit  $\Delta H_1$  Abstand des Beschleunigtunnels vom Geoid,  $H_1$  orthometrische Höhe des Profilanfangspunktes 1, sowie  $H_1^*$  Abstand des Beschleunigtunnels von der Oberfläche im Punkt 1 (etwa 10 m oder 100 m). Die Abhängigkeit der berechneten mittleren Schwerewerte  $\bar{g}_i$  (entlang der Lotlinien) von Dichtehypothesen in (13) kann – da Anfangs- und Endpunkte der Lotlinien zugänglich sind – durch Schweremessungen an der Oberfläche und im Beschleunigtunnel gemindert werden. Dabei kann die zusätzliche Berücksichtigung von Informationen zur Dichteverteilung (z.B. aus Bohrungen) eine sinnvolle Ergänzung sein.

### 3.1.4 Varianten des astronomischen Nivellements

Gl. (6) zur Geoidberechnung setzt – ebenfalls wie Gl. (14) zur Berechnung von Äquipotentialprofilen – voraus, dass die Lotabweichungen quasikontinuierlich an der Oberfläche vorliegen. Dann kann mit Gl. (4) eine lineare Lotabweichungsinterpolation zwischen benachbarten Stationen zuverlässig durchgeführt werden (Heiskanen und Moritz 1967, S. 197). Bei dichten Stationsanordnungen mit Abständen von 50 m oder 100 m ist diese Voraussetzung in den meisten Fällen sicherlich erfüllt. Liegen die Beobachtungspunkte dagegen weiter auseinander, können Schwerewerte oder Digitale Geländemodelle (DGM) zur Lotabweichungsinterpolation an Zwischenpunkten verwendet werden, an denen keine astrogeodätischen Beobachtungen vorliegen. Die zugehörigen Varianten des astronomischen Nivellements werden als *astrogravimetrisches Nivellement* (z.B. Campbell 1971, Daxinger 1996), als *astrogravimetrisch-topographisches Nivellement* (Boedecker 1976) und als *astronomisch-topographisches Nivellement* (z.B. Elmiger 1969, Bosch und Wolf 1974, Hirt und Flury 2008) bezeichnet. Alle drei Varianten eignen sich grundsätzlich nicht nur zur Bestimmung von Quasigeoid- und Geoidprofilen, sondern auch zur Bestimmung von Äquipotentialprofilen nach (14).

### 3.2. Auflösung und Genauigkeit

Durch ausreichend dichte Anordnung der Lotabweichungsstationen kann die räumliche Auflösung an die zu lösende Aufgabe angepasst werden. So ist es auch unter wirtschaftlichen Gesichtspunkten mit digitalen Zenitkamarasystemen möglich und vertretbar, Lotabweichungen in engen Stationsabständen von 100 m, 50 m oder sogar noch dichter zu beobachten (vgl. Abschnitt 4). Eine vereinfachte Abschätzung der erreichbaren Genauigkeit  $\sigma_{\Delta \text{Neq}}$  [mm] für den Verlauf (Höhendifferenz) der Äquipotentialfläche zwischen den Punkten 1 und  $n$  über einen Verbindungsweg der Länge  $S$  [km] gelingt unter der Annahme unkorrelierter Lotabweichungsmessungen durch (Hirt und Seeber 2005):

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta\text{Neq}} &= 4.8 \cdot \sqrt{n-1} \cdot ds [\text{km}] \cdot \sigma_{\varepsilon} ["] \\ &= 4.8 \cdot \frac{S [\text{km}]}{\sqrt{n-1}} \cdot \sigma_{\varepsilon} ["]\end{aligned}\quad (18)$$

mit  $n$  Anzahl der Stationen,  $ds$  (durchschnittlicher) Stationsabstand benachbarter Stationen [km],  $\sigma_{\varepsilon}$  Genauigkeit der Lotabweichungskomponente  $\varepsilon$  ["]. Gl. (18) setzt voraus, dass die Abtastung des Schwerefeldes mit einer ausreichenden räumlichen Auflösung erfolgt, so dass die Lotabweichungsdaten die Form des Äquipotentialprofils zutreffend wiedergeben. Bei größeren Stationsabständen (z.B. 1 km) kann es zu Fehlereinflüssen aufgrund von *Signalvernachlässigung* (also Abtastfehlern) kommen, die auch bei Hinzunahme topographischer Daten zur Lotabweichungsinterpolation nur begrenzt abgefangen werden (siehe Hirt und Flury 2008). Die Unsicherheit der Streckenbestimmung  $ds$  zwischen benachbarten Stationen hat keine spürbare Auswirkung und wurde in Gl. (18) vernachlässigt. Bei einer Profillänge  $S$  von 0.6 km sind beispielsweise bei einem Stationsabstand  $ds$  von 100 m  $n=7$  Lotabweichungsstationen zu beobachten. Man erhält bei einer Beobachtungsgenauigkeit von  $\sigma_{\varepsilon} = 0.09''$  für die Lotabweichungen eine Genauigkeit für den Verlauf des Äquipotentialprofils (in Stationshöhe) von:

$$\sigma_{\Delta\text{Neq}} = 4.8 \cdot \sqrt{6} \cdot 0.1 \cdot 0.09'' \approx 0.11 \text{ mm.}$$

Diese Abschätzung macht bereits das Submillimeter-Potential der astronomischen Methode deutlich. Korrelationen zwischen den Lotabweichungen können die erreichbaren Genauigkeiten reduzieren. Instrumentelle Restfehler von Zenitkamarasystemen führen zu eher schwachen Korrelationen, da geeignete Messanordnungen (z.B. Zweilagenmessung zur Elimination von Nullpunktabweichungen des Instrumentes, Messanordnung Lage 1-2-2-1 zur Minderung von Nullpunktdriften) eingesetzt werden und die verwendete Sensorik sorgfältig kalibriert wird, siehe hierzu z.B. Hirt und Seeber (2008) sowie Hirt (2004). Als Hauptursache von Korrelationen zwischen den Lotabweichungen kommen hauptsächlich Refraktionseinflüsse in Betracht (Abschnitt 4). Für einige unterschiedliche Profillängen  $S$  und Beobachtungsgenauigkeiten  $\sigma_{\varepsilon}$  für die Lotabweichungen finden sich in Tab. 2 die erreichbaren Genauigkeiten für den Verlauf des Äquipotentialprofils  $\sigma_{\Delta\text{Neq}}$ , wobei ein konstanter Stationsabstand  $ds = 50$  m angenommen wurde.

Die Auswirkung  $\Delta_{\Delta\text{Neq}}$  auf das Äquipotentialprofil (bzw. Geoid) aufgrund *systematischer Verfälschungen*  $\Delta\varepsilon$  aller Lotabweichungsstationen (z.B. kleine Restsystematiken durch langperiodische Refraktionseinflüsse mit gleichem Betrag und Vorzeichen) kann mit der Bogenformel abgeschätzt werden (nach Hirt und Flury 2008):

$$\Delta_{\Delta\text{Neq}} [\text{mm}] = 4.8 [\text{mm}] \cdot \frac{\Delta\varepsilon}{1''} \cdot \frac{S [\text{km}]}{1 [\text{km}]} \quad (19)$$

Bei einer systematischen Verfälschung  $\Delta\varepsilon = 0.01''$  über Profillängen  $S = 0.6$  km beträgt die Auswirkung  $\Delta_{\Delta\text{Neq}} = 0.03$  mm und bei  $\Delta\varepsilon = 0.05''$  erreicht  $\Delta_{\Delta\text{Neq}} = 0.14$  mm. Geometrisch zeigt sich ein Offset  $\Delta\varepsilon$  in einer systematischen Kippung des berechneten Äquipotentialprofils. Dieser Effekt ist für die Korrektur von Schlauchwaagenmessungen jedoch nicht entscheidend, da er kein zusätzliches ultrakurzwelliges Signal verursacht.

#### 4. Astrogeodätische Schwerefeldbestimmung im Testgebiet Steinhude

#### 4.1 Lotabweichungsbeobachtungen

Als Testgebiet wurde der Salzstock „Steinhuder-Meer-Linie“ südlich vom Steinhuder Meer bei Hannover ausgewählt, um die hochauflösende Anwendung des astronomischen Nivellements im Einflussbereich eines geophysikalischen Störkörpers untersuchen zu können. 144 Profilpunkte wurden entlang eines Bewirtschaftungsweges am Mittellandkanal im Abstand von 50 m auf einer Länge von 7150 m vermarktet (Abb. 3). Alle Stationen liegen praktisch auf der gleichen Höhe von etwa 50 m über Normalhöhennull. Durch Orientierung des Profils am Kanalverlauf konnte ein weitgehend glatter Verlauf erreicht werden. Ein glatter Profilverlauf ist für die Anwendung des astronomischen Nivellements nicht erforderlich, erleichtert jedoch die Feinstrukturanalyse.

Die geodätischen Koordinaten (Breite  $\varphi$  und Länge  $\lambda$ ) der Lotabweichungspunkte wurden unter Verwendung von SAPOS-HEPS (Satellitenpositionierungsdienst der deutschen Landesvermessungen – hochpräziser Echtzeitpositionierungsservice) mit einer Genauigkeit von wenigen cm (entsprechend etwa 0.001") eingemessen. Diese geringe Unsicherheit spielt keine Rolle im Fehlerhaushalt der Lotabweichungen. Zur Ermittlung der Lotabweichungen ( $\xi, \eta$ ) wurden die Lotrichtungparameter (astronomische Koordinaten  $\Phi, \Lambda$ ) der 144 Profilpunkte mit dem digitalen Zenitkameranystem TZK2-D der Universität Hannover (Abb. 4) innerhalb einer ersten, zweimonatigen Messperiode im Frühjahr 2005 bestimmt (vgl. Hirt und Seeber 2005). Je nach Nachtlänge konnten zwischen 10 und 17 Stationen pro Nacht mit dem Zenitkameranystem eingemessen werden.

Auf jeder Station wurden bei etwa 20-minütiger Beobachtungsdauer 50 Einzelmessungen der Lotrichtungparameter ( $\Phi, \Lambda$ ) durchgeführt. Eine Einzelmessung umfasst die digitale Fotografie des zenitalen Sternfeldes in zwei Lagen sowie die Registrierung der zugehörigen Belichtungsepochen und Neigungswerte (für die Korrektur der Stehachsneigung). Die astrometrische Auswertung einer Einzelmessung erlaubt die Berechnung der Lotabweichungen auf einem Genauigkeitsniveau von etwa 0.2" (vgl. Hirt und Seeber 2008). Mit der Durchführung von 20-minütigen Mehrfachmessungen und Mittelwertbildung werden äußere Einflüsse wie Szintillation und kurzperiodische Refraktionsanomalien sowie instrumentelle Rauschquellen reduziert, so dass eine Genauigkeit von 0.08" bis 0.10" erreicht wird. Für Details zur Zenitkameranessung, Auswertung und zum Fehlerhaushalt wird auf Hirt (2004) verwiesen.

In einer zweiten Messperiode im Herbst 2005 (sowie noch einzelne Messnächte im Jahr 2006) wurden die Lotabweichungen ( $\xi, \eta$ ) für den größten Teil des Profils (138 Stationen) ein zweites Mal mit dem Zenitkameranystem bestimmt sowie eine Verlängerung des Profils in westlicher Richtung um 10 Stationen, entsprechend 500 m Profillänge, vorgenommen. Im Oktober 2005 konnten in zwei Nächten Maximalwerte von 22 und 20 Lotabweichungsstationen pro Nacht erreicht werden, was die erreichte Wirtschaftlichkeit der Lotabweichungsmessung mit digitalen Zenitkameranystemen zeigt.

Die Lotabweichungsdatensätze, die in beiden Messzeiträumen erfasst wurden, sind in Abb. 5 (oben) dargestellt. In beiden Komponenten zeigt sich über die Profillänge von etwa 7 km eine Variation zwischen 2" und 3". Es ist zu erkennen, dass das Lotabweichungsfeld über dem Salzstock (etwa Profilkilometer 4 bis 5) eine wellenähnliche Variation mit einer Amplitude von etwa 0.5" zeigt. Im unteren Teil von Abb. 5 sind die Differenzen dargestellt, die sich zwischen den 138 doppelt beobachteten Stationen ergibt. Die Residuen streuen zum größten Teil innerhalb einer Intervallbreite von 0.5" und zeigen damit eine gute Übereinstimmung der

beiden Datensätze. Die zugehörige Statistik ist in Tab. 3 für beide Komponenten zusammengestellt. Die mittlere quadratische Abweichung (RMS, root mean square) aus Differenzen beträgt für beide Komponenten etwa 0.12". Da die Residuen die Fehleranteile aus jeweils zwei Beobachtungen enthalten, sind die Standardabweichungen aus Doppelmessungen um den Faktor  $\sqrt{2}$  niedriger als die RMS-Werte und betragen etwa 0.09". Diese Angaben sind in Übereinstimmung mit Standardabweichungen, die im Rahmen anderer Feldkampagnen mit dem Zenitkamasystem TZK2-D ermittelt wurden (z.B. Hirt und Flury 2008, Hirt et al. 2008), und zeigen anhand eines umfassenden Datensatzes das hohe Genauigkeitsniveau für Lotabweichungen, welches bereits bei kurzen Messzeiträumen von 20 min pro Station erreicht werden kann.

Bei Betrachtung der Statistik in Tab. 3 fällt auf, dass die  $\eta$ -Residuen – im Gegensatz zu den  $\xi$ -Residuen – nicht normalverteilt zum Mittelwert 0 sind, sondern einen Mittelwert von 0.03" annehmen. Diese Verfälschung hängt eng mit dem in Abb. 5 erkennbaren Streuverhalten der  $\eta$ -Komponente zwischen den Profilkilometern 4 und 6 zusammen. In diesem Bereich zeigen sich fast durchgehend positive Differenzen zwischen 0.00" und 0.25". Als Ursache wird ein saisonaler, systematischer Refraktionseinfluss vermutet, der im Abschnitt 4.3 weiter diskutiert wird. Es soll an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass auch in anderen Profilbereichen korrelierte Strukturen bei benachbarten Lotabweichungsstationen sichtbar sind (vgl. Abb. 5, Komponente  $\xi$  bei Profilkilometer 2.5 und 3.5). Da diese nicht in beiden Datensätzen übereinstimmend auftreten und Bereiche von etwa 200 m Länge betroffen sind, liegt als Ursache der Einfluss von systematischen Refraktionseffekten mit Frequenzen im Stundenbereich nahe.

## 4.2 Auswertung und Analysen

Aufgrund der Doppelbeobachtungen decken die beiden im Abschnitt 4.1 beschriebenen Lotabweichungsdatensätze jeweils die gesamte Profillänge ab und können für vergleichende Berechnungen von Äquipotentialprofilen verwendet werden. Beide Datensätze wurden mit Gl. (15) getrennt voneinander ausgewertet, d.h. entlang des Weges integriert. Die beiden Äquipotentialprofile verlaufen an der Oberfläche in Höhe der ersten Station (etwa 51 m über dem Geoid). Da alle Profilpunkte praktisch auf Höhe der ersten Station liegen, nimmt die modifizierte orthometrische Korrektur (16) einen Wert von 0 mm an (vgl. auch Abschnitt 4.4).

Im ersten Datensatz (Frühjahr 2005) wurden – ohne spürbare Auswirkung auf die Resultate – 6 Stationen vernachlässigt, um einen direkten Vergleich der beiden Datensätze (je aus 138 Stationen) zu ermöglichen. Da das Profil näherungsweise in Ost-West-Richtung verläuft, hängen die Resultate wesentlich von den Werten der Komponente  $\eta$  (vgl. Gl. 2) ab.

Das Ergebnis der Berechnungen ist der Verlauf der Äquipotentialprofile  $\Delta N_{in}^{eq}$  (Messung 1) und  $\Delta N_{in}^{eq}$  (Messung 2) an der Erdoberfläche über eine Profillänge von 7 km (Abb. 6, oben).

Man sieht zwei fast identische Verläufe der Äquipotentialprofile. Über die gesamte Profillänge ändert sich die Höhe der Äquipotentialprofile um etwa 12 cm. Die erfasste Feinstruktur wird durch Abzug einer identischen Regressionsgeraden von beiden Profilverläufen sichtbar (Abb. 6, Mitte). Es zeigt sich eine wellenähnliche Struktur mit einer Amplitude von 2-3 mm, deren Minimum nicht über dem Salzstock liegt (vgl. Abb. 3).

Da über einem Salzstock typischerweise ein lokales Minimum im (trendbereinigten) Äquipotentialprofil anzutreffen ist (z.B. „Benther“ Salzstock bei Hannover, vgl. Hirt 2004, S.160), deutet sich an, dass die gravitative Wirkung des Salzstocks „Steinhuder-Meer-Linie“ von einem zusätzlichen Einfluss überlagert wird. Dies könnte insbesondere ein Dichtekontrast

zwischen den Gesteinsschichten östlich und westlich des Salzstocks, oder eine asymmetrische Form oder Neigung des Salzstocks sein. Bei Profilkilometer 2.7 ist ein kleiner Versatz zu erkennen, der seine Ursache in einer geringfügigen azimutalen Änderung des Profilverlaufes hat. Im unteren Teil von Abb. 6 sind die Differenzen

$$\delta \Delta N_{1n}^{eq} = \Delta N_{1n}^{eq} (\text{Messung 1}) - \Delta N_{1n}^{eq} (\text{Messung 2}) \quad (20)$$

der beiden Berechnungen über die Profillänge aufgetragen, die verdeutlichen, wie sich Unsicherheiten beider Berechnungen im Profilverlauf akkumulieren. Es ist zu erkennen, dass die beiden Äquipotentialprofile auf den ersten 4000 m fast deckungsgleich sind, die Abweichungen bewegen sich im Bereich weniger 0.1 mm. Im restlichen Profilverlauf zeigen sich dagegen größere Differenzen von etwa 1 mm (siehe auch Abschnitt 4.3). Die zugehörige Statistik aus den Differenzen  $\delta \Delta N_{1n}^{eq}$  zwischen beiden Berechnungen ist in Tab. 4 sowohl für die gesamte Profillänge als auch für die ersten 4 Profilkilometer zusammengestellt, die offensichtlich weniger von systematischen Einflüssen betroffen sind. Über die gesamte Profillänge ergeben sich mittlere quadratische Abweichungen (RMS) aus den  $\delta \Delta N_{1n}^{eq}$ -Differenzen von 0.55 mm und eine Standardabweichung von etwa 0.4 mm. Dagegen wird auf den ersten 4 km ein RMS-Wert von 0.15 mm und eine Standardabweichung von etwa 0.1 mm erreicht. Diese Zahlen zeigen, dass mit der astronomischen Methode das Submillimeter-Genauigkeitsniveau über mehrere Kilometer Profillänge für Äquipotentialprofile erreicht werden kann.

Die RMS-Werte und Standardabweichungen in Tab. 4 basieren auf Differenzen  $\delta \Delta N_{1n}^{eq}$ , die über Entfernungen von 50 m, 100 m, ..., 4000 m bzw. 7150 m aufgetreten sind und stellen folglich akkumulierte Genauigkeitsmaße dar. Sie erlauben keine Aussage über die Standardabweichung  $\sigma_{\Delta N_{eq}}$ , die über bestimmte Profillängen  $S$  für den Verlauf des Äquipotentialprofils erreicht wird. Die Berechnung der Standardabweichung für die Übertragung von Äquipotentialprofilhöhen über bestimmte Profillängen  $S$  gelingt jedoch, wenn die Differenzen  $d$  zwischen den beiden Äquipotentialprofilen für Profilausschnitte *konstanter Länge*  $S$  bezogen werden (modifiziert nach Hirt und Flury 2008):

$$d = \Delta N_{1j}^{eq} (1) - \Delta N_{1j}^{eq} (2) - (\Delta N_{1i}^{eq} (1) - \Delta N_{1i}^{eq} (2)) = \delta \Delta N_{1j}^{eq} - \delta \Delta N_{1i}^{eq} . \quad (21)$$

Hier sind  $i$  und  $j$  die Indizes aller Stationspaare des Profils mit einer konstanten Entfernung  $S$ , z.B. 600 m. Unter der Annahme, dass beide Äquipotentialprofile die gleiche Genauigkeit haben, kann die Differenz  $d$  zur Berechnung von Standardabweichungen aus Doppelmessungen verwendet werden:

$$s_{\Delta N_{eq}} = \sqrt{\frac{1}{2m} \sum_1^m d^2} \quad (22)$$

mit  $m$  Anzahl der gebildeten Differenzen. Die empirischen Standardabweichungen  $s_{\Delta N_{eq}}$  wurden für die unterschiedlichen Entfernungen  $S = 100$  m, 200 m, 600 m und 1000 m aus den Differenzen  $d$  über *das gesamte Profil* und *über die ersten 4 Profilkilometer* berechnet und sind in Tab. 5 zusammengestellt. Man erkennt, dass empirische Genauigkeiten  $s_{\Delta N_{eq}}$  von etwa 0.03 mm über 100 m, 0.05 mm über 200 m und etwa 0.10-0.15 mm über 600 m für die Bestimmung von Äquipotentialprofilen erreicht wurden. Die Genauigkeitsanforderungen, die mit den Beschleunigern TESLA, NLC und ILC verbunden sind (Abschnitt 2), können somit auch in der Praxis erfüllt werden.

Ein Vergleich mit den ebenfalls in Tab. 5 angegebenen *theoretischen* Standardabweichungen  $\sigma_{\Delta_{\text{Neq}}}$  des Äquipotentialprofils nach Gl. (9) zeigt eine gute Übereinstimmung mit den empirischen Genauigkeiten  $s_{\Delta_{\text{Neq}}}$ , die aus den Daten der ersten 4 Profilkilometer berechnet wurden. Als Ursache für die geringen Unterschiede (etwa Faktor 1.2) über Entfernungen von 600 m und 1000 m kann der korrelierende Einfluss von Refraktionsanomalien mit mittleren Frequenzen (im Stundenbereich) auf benachbarte Lotabweichungsstationen (vgl. Abb. 6, Komponente  $\xi$  bei Profilkilometer 2.5 und 3.5) angenommen werden. Bei den empirischen Genauigkeiten aus den Daten der gesamten Profillänge ist die Übereinstimmung mit der Theorie dagegen schlechter, insbesondere über Entfernungen von 600 m und 1000 m. Wahrscheinliche Ursache ist ein langperiodischer Refraktionseinfluss im Profilbereich 4-6 km, wie nachfolgend diskutiert wird.

### 4.3 Rolle der Refraktion

Bei Betrachtung von Abb. 6 ist zu erkennen, dass die Übereinstimmung der Äquipotentialprofile ab Profilkilometer 4 deutlich abnimmt. Auf einer Profillänge von etwa 2 km (Profilkilometer 4-6) ändern sich die Differenzen fast linear und nehmen Beträge von etwa 1 mm an. Diese Genauigkeitsabnahme steht in direktem Zusammenhang mit dem in Abb. 5 sichtbaren Verhalten der  $\eta$ -Residuen in diesem Bereich. Weiter fällt auf, dass sich exakt im Profilbereich 4-6 km das Profilazimut ändert (vgl. auch Krümmung des Kanalverlaufs in Abb. 3). Instrumentelle Einflüsse sind aufgrund regelmäßiger Kontrollmessungen mit dem Zenitkameranystem während der Messkampagne auf einer Referenzstation (Hirt und Seeber 2008) ebenso unwahrscheinlich wie Einflüsse der bei der Auswertung verwendeten Sternkataloge (siehe hierzu Hirt 2004). Auch eine zeitliche Veränderung des lokalen Schwerfeldes durch asymmetrische Änderungen des Grundwasserspiegels um mehrere Meter scheidet als Ursache mit großer Wahrscheinlichkeit aus, da die zugehörige maximale Änderung der Geoidundulation nur eine Größenordnung von 0.1 mm erreichen würde (Ergebnis einer Simulationsrechnung unter folgenden Annahmen: Dichteveränderung durch Grundwasservariation von  $200 \text{ kg/m}^3$ , Schichtmächtigkeit 5 m, Ausdehnung  $5 \text{ km} \cdot 5 \text{ km}$ ). Es wird daher vermutet, dass *jahreszeitlich bedingte Refraktionseinflüsse* zu einem Großteil für die sichtbaren Effekte verantwortlich sind.

Im Profilbereich 4-6 km befindet sich in westlicher Richtung auf mehreren 100 m Länge der Mittellandkanal und in östlicher Richtung Wiesenlandschaft. Je nach Jahreszeit und Tageszeit kann es erhebliche Temperaturdifferenzen zwischen der Wassertemperatur des Kanals und der Bodentemperatur des Wiesenlandes geben. Als Folge kann sich ein horizontales Temperaturgefälle in den bodennahen Luftschichten einstellen. Horizontale Temperaturgradienten wiederum verursachen Schichtneigung, die *Zenitrefraktion* (anomale Refraktion) bewirkt und die astronomisch gemessenen Lotrichtungparameter ( $\Phi, \Lambda$ ) sowie die Lotabweichungen ( $\xi, \eta$ ) systematisch verfälscht (z.B. Bretterbauer 1965, Ramsayer 1967, 1970, Dimopoulos 1982). Der Refraktionseinfluss scheint für die Stationen im Profilbereich 4.5-6 km – aufgrund der besonderen Orientierung zum Kanalverlauf – stärker zu sein als in den übrigen Profiltteilen. Das Auftreten von Temperaturgradienten mit unterschiedlichem Vorzeichen in den Messzeiträumen Frühjahr und Herbst und daraus resultierenden Refraktionseffekten ist durchaus denkbar. So gibt auch Löser (1957), S. 33 die „Lage des Beobachtungspunktes an Flüssen oder Seen“ als mögliche Ursache für Schichtneigung an. Es wird also klar, dass der in diesem Beitrag analysierte Datensatz in einer potentiell refraktiven Umgebung (Land-Wasser-Übergang) erfasst wurde.

Refraktionseinflüsse können mit Amplituden von etwa 0.1"-0.2" auf zeitlich variablen Skalen (kurzperiodisch im Minutenbereich oder mit mittleren Perioden im Stundenbereich) auftreten, wie auf Grundlage von Dauerbeobachtungen mit dem Hannoverschen Zenitkamasystem TZK2-D auf einer Referenzstation festgestellt werden konnte (Hirt 2006). Wie es sich im vorliegenden Datensatz andeutet, kann Zenitrefraktion auch als saisonaler (langperiodischer) Effekt auf die Lotabweichungsmessungen auf Stationen einwirken, in deren Umgebung ungünstige Refraktionseinflüsse zu erwarten sind. Refraktionseinflüsse führen zu Korrelationen zwischen gemessenen Lotabweichungsstationen und reduzieren die erreichbare Genauigkeit des astronomischen Nivellements. Dieser Effekt ist in Tab. 5 zu erkennen, wo die empirischen Standardabweichungen für Äquipotentialprofile (berechnet über die gesamte Profillänge, also auch den kritischen Profildbereich 4-6 km) von den theoretischen Werten, die bei unkorrelierten Lotabweichungen gelten, deutlich abweichen.

#### 4.4 Modifizierte orthometrische Korrektur

Abschließend soll noch ein Eindruck vermittelt werden, welche Größe die modifizierte orthometrische Korrektur  $E_{1n}^{eq(\Delta H_1)}$  aufgrund der Nichtparallelität der Äquipotentialflächen des Erdschwerefeldes für Äquipotentialprofile in unterschiedlichen Höhen annimmt. Dazu wurde Gl. (12) mit Oberflächenschwerewerten  $g$  ausgewertet, die für alle Stationen des Profils auf Grundlage des Schwereinformationssystems SIS der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt prädiert wurden (PTB 2007). Die prädierten Oberflächenschwerewerte  $g$  basieren auf Bougeranomalienkarten und weisen im norddeutschen Flachland eine Genauigkeit von 1 mgal und besser auf. Die mittleren Schwerewerte  $\bar{g}_i$  entlang der Lotlinien wurden über die Näherungsgleichung (13) ermittelt. Da der Salzstock unterhalb des Geoids liegt, wurde die Standarddichte von 2670 kg/m<sup>3</sup> für alle Profilpunkte beibehalten.

Für den vertikalen Abstand  $\Delta H_1$  des Äquipotentialprofils vom Geoid auf der ersten Station wurden 0 m (entspricht der orthometrischen Korrektur  $E_{1n}^O$ ), 41 m (Äquipotentialprofil, das etwa 10 m unter der Oberfläche verläuft) und 51 m (Äquipotentialprofil an der Oberfläche) angenommen. Der Verlauf der modifizierten orthometrischen Korrektur  $E_{1n}^{eq(\Delta H_1)}$  für die drei Varianten ist in Abb. 7 dargestellt. Für ein Äquipotentialprofil an der Oberfläche nimmt die Korrektur  $E_{1n}^{eq(51m)}$  praktisch einen Wert von 0 mm an und ist damit vernachlässigbar (vgl. auch Abschnitt 3.3). Die modifizierte orthometrische Korrektur  $E_{1n}^{eq(41m)}$ , die für die Berechnung eines Beschleunigtunnels in etwa 10 m Tiefe notwendig wäre, überschreitet einen Betrag von 0.1 mm nicht, und die orthometrische Korrektur  $E_{1n}^O = E_{1n}^{eq(0m)}$  nimmt im Testgebiet eine Größe von einigen 0.1 mm an. Man erkennt, dass die (modifizierte) orthometrische Korrektur im Testgebiet umso größere Beträge annimmt, je tiefer das zugehörige Äquipotentialprofil unterhalb der Oberfläche verläuft.

Die Genauigkeit der orthometrischen Korrektur  $E_{1n}^O$  wurde grob abgeschätzt, indem zu den prädierten Schwerewerten ein normalverteiltes Rauschen von 1 mgal (dies entspricht etwa der Unsicherheit der Schwereprädiertion) addiert wurde und (12) erneut ausgewertet wurde. Die aufgetretenen Abweichungen von wenigen 0.01 mm geben einen Hinweis auf die untergeordnete Rolle, die die orthometrische und modifizierte orthometrische Korrektur bei den durchgeführten Untersuchungen spielt. Es sei darauf hingewiesen, dass die Berechnung von (modifizierten) orthometrischen Korrekturen in anderen Gebieten (z.B. mit stärkeren Höhenvariationen) mit größeren Unsicherheiten verbunden sein kann als im Testgebiet Steinhude. Die erreichbare Genauigkeit hängt zudem von der Übereinstimmung der



wirklichen Gesteinsdichten mit den Dichtehypothesen in (13) ab. Für weitere Genauigkeitsabschätzungen im Zusammenhang mit der Berechnung der orthometrischen Korrektur wird auf Heiskanen und Moritz (1967) und Wirth (1990) verwiesen.

## 5. Diskussion und Ausblick

In diesem Beitrag wurde das astronomische Nivellement als geeignetes Verfahren zur hochgenauen lokalen Schwerfeldbestimmung für den Anlagenbau vorgestellt. Nach einigen theoretischen Überlegungen zur Berechnung von Äquipotentialprofilen, zur räumlichen Auflösung und erreichbaren Genauigkeit wurden die Resultate einer lokalen Schwerfeldbestimmung mit Lotabweichungsdaten vorgestellt, die mit dem Hannoverschen Zenitkameranystem im Testgebiet Steinhude durchgeführt wurde. Es konnte dabei erstmalig empirisch nachgewiesen werden, dass das Submillimeter-Genauigkeitsniveau für die Geometrie von Äquipotentialflächen bis zu einigen Kilometern Entfernung mit dem astronomischen Nivellement praktisch erreicht werden kann.

Die Untersuchungen haben einerseits die Leistungsfähigkeit der astronomischen Methode aufgezeigt, andererseits jedoch auch die Schwierigkeiten verdeutlicht, die mit dem Auftreten von systematischen Refraktionseinflüssen verbunden sein können. In der Analyse hat sich ein jahreszeitlich bedingter Refraktionseinfluss gezeigt, der zu einer deutlichen Reduzierung der erreichbaren Genauigkeit in bestimmten Profilvereichen führt. Der analysierte Lotabweichungsdatensatz wurde an einem Land-Wasser-Übergang und damit in einer potentiell refraktiven Umgebung erfasst. Auf der einen Seite ist mit den sichtbaren Refraktionseinflüssen ein deutlicher Hinweis verbunden, dass in anderen potentiell refraktiven Umgebungen (z.B. Stationen an steilen Berghängen, vgl. auch Bretterbauer 1965) mit ähnlichen Effekten zu rechnen ist. Auf der anderen Seite kann erwartet werden, dass in vielen anderen Messgebieten mit Beobachtungsstationen in günstigerer Umgebung (z.B. homogener Untergrund) als im Testgebiet Steinhude Refraktionseinflüsse eine geringere Rolle spielen und daher mindestens die in dieser Studie ermittelten Genauigkeiten erreichbar sind. Es wird darauf hingewiesen, dass Untersuchungsbedarf hinsichtlich der korrelierenden Wirkung der Refraktion besteht und Konzepte zur Beherrschung mittel- und langperiodischer Refraktionseffekte notwendig sind. Ein denkbarer Ansatz wäre die Nutzung einer mobilen Zenitkamera und einer zweiten Zenitkamera als Referenzstation, die – in Analogie zum differentiellen GPS – Refraktionskorrekturen für die mobile Kamera bereitstellt. Kurzperiodische Refraktionseinflüsse sind dagegen weniger kritisch, da sie durch die 20-minütige (oder ggf. längere) Beobachtungsdauer reduziert werden (vgl. Hirt 2006, Hirt und Seeber 2008).

In Abschnitt 2 wurde die Frage nach der Existenz von Feinstrukturen des Erdschwerfeldes mit Skalen von wenigen 100 m bis 1 km und Amplituden im Submillimeterbereich gestellt. Ein grundsätzlicher messtechnischer Nachweis derartiger ultrakurzwelliger Undulationen ist mit der vorliegenden Untersuchung nicht gelungen. Die Ursache der in Hirt und Seeber (2005) erwähnten sehr kurzwelligen Feinstrukturen in den Lotabweichungsdaten des Testgebietes können damit dem Refraktionsfeld und nicht dem Gravitationsfeld zugeordnet werden. Einfache Simulationsrechnungen zeigen jedoch, dass beispielsweise eine würfelförmige unterirdische Struktur von 200 m Kantenlänge und einem Dichtekontrast von  $300 \text{ kg/m}^3$  zum umgebenden Material (typisch für Salzstöcke) eine kurzwellige Undulation mit einer Amplitude von etwa 0.15 mm verursacht (Feest et al. 2003). In einem Beitrag von Schürer (1962), S. 102 werden „Amplituden bis etwa 0.1 mm für Undulationen, die durch

einzelne Felsen, Flußläufe und Hügel entstehen“ abgeschätzt. Folglich kann nicht ausgeschlossen werden, dass auf ultrakurzwelligen Skalen des Schwerefeldes entsprechende Undulationen existieren können.

Als Gesamtergebnis der vorliegenden Untersuchung kann festgehalten werden, dass mit dem astronomischen Nivellement ein theoretisch geeignetes und praktisch erprobtes Verfahren verfügbar ist, um Äquipotentialprofile auf dem Genauigkeitsniveau von 0.1 mm (0.05 mm) über Entfernungen von etwa 1 Kilometer (200 m) bereitzustellen, wenn Lotabweichungsdaten mit einer Genauigkeit von etwa 0.1" in kurzen Abständen (50 m) entlang eines Profils vorliegen.

Ein Vergleich mit Tab. 1 zeigt, dass die eingangs beschriebenen Genauigkeitsforderungen an die Schwerefeldbestimmung, die mit der Justierung der Linearbeschleunigervarianten TESLA (0.2 mm über 600 m), NLC (0.1 mm über 150 m) sowie ILC (0.2 mm über 200 m) verbunden sind, mit der astrogeodätischen Methode praktisch erfüllbar sind. Berücksichtigt man die Tatsache, dass auch die Schlauchwaagenmessung und die Höhenübertragung von der Schlauchwaage auf den Linearbeschleuniger mit Unsicherheiten verbunden sind, ergeben sich höhere als die in Tab. 1 genannten Genauigkeitsforderungen an die Schwerefeldbestimmung. Ein Vergleich mit Tab. 5 zeigt, dass auch diese mit der astrogeodätischen Methode erfüllbar sind, vorausgesetzt, die Messungen finden nicht in besonders refraktiven Umgebungen (wie z.B. Berghänge oder Uferbereiche) statt.

Eine weitere Steigerung der Genauigkeit für astrogeodätisch bestimmte Äquipotentialprofile ist grundsätzlich durch längere Beobachtungszeiten (als 20 min) und durch Wahl kürzerer Stationsabstände erreichbar. Mit der Justierung des in der Schweiz vom CERN geplanten Linearbeschleunigers CLIC sind für die Schwerefeldbestimmung ungekannt hohe Genauigkeitsforderungen von 10 µm über 200 m verbunden (vgl. Abschnitt 2). Stellt man Gl. (9) um, die zur Genauigkeitsabschätzung der astronomischen Methode dient, so erhält man einen Ausdruck, mit dem die Anzahl  $n$  der Lotabweichungsstationen berechnet werden kann, um die gestellte Aufgabe bei unkorrelierten Daten zumindest theoretisch zu lösen:

$$n = \left( 4.8 \cdot S [\text{km}] \frac{\sigma_{\varepsilon} ["]}{\sigma_{\Delta\text{Neq}} [\text{mm}]} \right)^2 + 1. \quad (23)$$

Es bedeuten:  $S$  Profillänge,  $\sigma_{\varepsilon}$  Beobachtungsgenauigkeit für die Lotabweichungen und  $\sigma_{\Delta\text{Neq}}$  Genauigkeit für den Verlauf des Äquipotentialprofils. Setzt man als Genauigkeit der Lotabweichungen  $\sigma_{\varepsilon} = 0.05"$  an, die mit digitalen Zenitkamarasystemen bei etwa einstündiger Beobachtungsdauer erreichbar ist (Hirt und Seeber 2008), und führt man für  $S = 0.2$  km und für  $\sigma_{\Delta\text{N}} = 0.01$  mm ein, so ergibt sich  $n = 24.04$ . Man würde also 25 Lotabweichungsstationen auf 200 m (dies entspricht einem extrem kurzen Stationsabstand von 8 m) benötigen und müsste jede Station etwa eine Stunde beobachten, um die geforderte Genauigkeit zu erreichen. In der Praxis werden jedoch kleine systematische Fehlereinflüsse der Lotabweichungsmessung einer derartigen Genauigkeitssteigerung im Weg stehen. Es versteht sich daher, dass umfassende Untersuchungen notwendig werden, um Korrelationen zwischen benachbarten Lotabweichungsmessungen (aufgrund residualer instrumenteller Einflüsse, jedoch insbesondere aufgrund von Refraktionsanomalien) zu reduzieren und zumindest eine Annäherung an die theoretischen Genauigkeiten zu erreichen. Auch die zusätzliche Berücksichtigung von Schweredaten, Topographie- und Dichtemodellen kann hierzu notwendig werden. Untersuchungen zur hochauflösenden Schwerefeldbestimmung für

das Beschleunigervorhaben CLIC sollen in Zukunft an der ETH Zürich in Zusammenarbeit mit CERN durchgeführt werden (Bürki 2008).

## **Dank**

Der Verfasser dankt Willfried Schwarz (Bauhaus Universität Weimar) und Günter Seeber (Leibniz Universität Hannover) für die Impulse, den sehr kurzwelligen Frequenzbereich des Erdschwerefeldes im Zusammenhang mit der Justierung von Linearbeschleunigern mit der Zenitkamera zu untersuchen. Jakob Flury (CSR Texas), Anna Somieski und Beat Bürki (ETH Zürich) sowie einem anonymen Reviewer gebühren Dank für wertvolle Hinweise zum Manuskript. Die Teilnehmer des Projektseminars Erdmessung 2002/2003 haben einige Voruntersuchungen durchgeführt. Den studentischen Hilfskräften des Instituts wird für die Unterstützung der Feldarbeiten gedankt und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Förderung der Untersuchungen im Zeitraum 2005 und 2006 unter der Projektnummer Se 313/22.

## **Literatur:**

Becker, F., Coosemans, W. und Jones, M. (2002): Consequences of Perturbations of the Gravity Field on HLS Measurements. Proc. of 7th Int. Workshop on Accelerator Alignment (IWAA): 327-342, SPring-8, Japan

BKG (2005): Quasigeoid der Bundesrepublik Deutschland. Die Höhenreferenzfläche der Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Länder GCG05 (German Combined Quasigeoid 2005). Geodätische Basisdaten Bundesrepublik Deutschland. URL: [www.geodatenzentrum.de/docpdf/quasigeoid.pdf](http://www.geodatenzentrum.de/docpdf/quasigeoid.pdf)

Boedecker, G. (1976): Astrogravimetrisch-topographisches Nivellement. Wiss. Arb. Lehrst. für Geod., Phot. und Kart. Techn. Univ. Hannover Nr. 64

Bosch, W. und Wolf, H (1974): Über die Wirkung von topographischen Lokal-Effekten bei profilweisen Lotabweichungs-Prädiktionen. Mitteilungen aus dem Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn Nr. 28

Bretterbauer, K. (1965): Über mögliche Refraktionsanomalien infolge von Schichtenneigungen. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 53, Nr. 4: 113-119

Bürki, B., Müller, A., und Kahle, H.-G. (2004): DIADEM: The New Digital Astronomical Deflection Measuring System for High-precision Measurements of Deflections of the Vertical at ETH Zurich. Electronic Proc. IAG GGSM2004 Meeting in Porto, Portugal

Bürki (2008): Persönliche Mitteilung

Campbell J. (1971): Eine Erweiterung der Theorie des astronomischen Nivellements bei Einbeziehung von Schweremessungen. Wissen. Arb. Lehrst. Geod. Phot. u. Kart. TU Hannover Nr. 49

Daxinger, W. (1996): Astrogravimetrische Geoidbestimmung für Ingenieurprojekte. Geowissenschaftliche Mitteilungen des Instituts für Theoretische Geodäsie und Geophysik, Abteilung Höhere Geodäsie, Heft 45, Wien

Denker, H. (1988): Hochauflösende regionale Schwerefeldbestimmung mit gravimetrischen und topographischen Daten. Wissen. Arb. Fach. Vermessungswesen Univ. Hannover Nr. 156

Denker (2006): Das Europäische Schwere- und Geoidprojekt (EGGP) der Internationalen Assoziation für Geodäsie. zfv 131: 335-344

DESY (2007a): [http://zms.desy.de/aktuelles/news/2007/ilc\\_1202/index\\_ger.html](http://zms.desy.de/aktuelles/news/2007/ilc_1202/index_ger.html)

DESY (2007b): [http://zms.desy.de/presse/pressemitteilungen/2007/pm\\_080207/index\\_ger.html](http://zms.desy.de/presse/pressemitteilungen/2007/pm_080207/index_ger.html)

Dimopoulos, T. (1982): Untersuchungen über die Genauigkeit der Ermittlung der astronomischen Refraktion.

Dissertation an der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Stuttgart

Elmiger, A. (1969): Studien über Berechnung von Lotabweichungen aus Massen, Interpolation von Lotabweichungen und Geoidbestimmung in der Schweiz. Mitt. Inst. Geod. Phot. ETH Zürich Nr. 12

Feest, C. et al. (2003): Projektseminar Erdmessung 2002/2003. Abschlussbericht. Institut für Erdmessung, Universität Hannover, unveröffentlicht

Galle, A. (1914): Das Geoid im Harz. Königl. Preuß. Geod. Inst. Nr. 61, Berlin

Gerlach, C. (2003): Zur Höhensystemumstellung und Geoidberechnung in Bayern. DGK C 571

Heck, B. (1995): Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung. 2. Auflage. Wichmann Verlag, Heidelberg

Heiskanen, W.A. und Moritz, H. (1967): Physical geodesy. Freeman and Co., San Francisco

Helmert, F. (1880/1884): Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. Teubner, Leipzig (reprint Minerva, Frankfurt a.M. 1961)

Helmert, F. (1900): Zur Bestimmung kleinerer Flächenstücke des Geoids aus Lothabweichungen mit Rücksicht auf Lothkrümmung. Erste Mittheilung. Sitzungsberichte der königl. preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin. Nachdruck in: Friedrich Robert Helmert – Akademievorträge. Verlag des Instituts für Angewandte Geodäsie, Frankfurt a.M. 1993

Hirt, C. (2004): Entwicklung und Erprobung eines digitalen Zenitkamarasystems für die hochpräzise Lotabweichungsbestimmung. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik an der Universität Hannover Nr. 253 (Dissertation). URL: <http://edok01.tib.uni-hannover.de/edoks/e01dh04/393223965.pdf>.

Hirt, C. (2006). Monitoring and Analysis of Anomalous Refraction Using a Digital Zenith Camera System. Astronomy and Astrophysics, Volume 459, Issue 1, November III 2006: 283-290. DOI: 10.1051/0004-6361:20065485

Hirt, C. und Seeber, G. (2005): High-Resolution Local Gravity Field Determination at the Sub-Millimeter Level using a Digital Zenith Camera System. In: Dynamic Planet, Cairns 2005 (ed. P. Tregoning und C. Rizos), IAG Symposia 130: 316-321

Hirt, C. und Seeber (2008): Accuracy Analysis of vertical deflection data observed with the Hannover Digital Zenith Camera System TZK2-D. Journal of Geodesy 82: 347-356. DOI: 10.1007/s00190-007-0184-7

Hirt, C. und Flury, J. (2008): Astronomical-topographic levelling using high-precision astrogeodetic vertical deflections and digital terrain model data. Journal of Geodesy 82: 231-248. DOI: 10.1007/s00190-007-0173

Hirt, C., Feldmann-Westendorff, U., Denker, H., Flury, J., Jahn, C.-H., Lindau, A., Seeber, G., Voigt, C. (2008): Hochpräzise Bestimmung eines astrogeodätischen Quasigeoidprofils im Harz für die Validierung des Quasigeoidmodells GCG05. zfv 133:108-119

ILC (2007): Reference Design Report. URL: [media.linearcollider.org/rdr\\_draft\\_v1.pdf](http://media.linearcollider.org/rdr_draft_v1.pdf)

Jung, F.R. (1957): Potentialdifferenzen und orthometrische Höhen C.F. Baeschlin Festschrift, Orell Füssli Verlag, Zürich: 105-126

Ledersteger, K. (1969): Handbuch der Vermessungskunde, Band 5 (Astronomische und Physikalische Geodäsie). Hrsg: Jordan/Eggert/Kneissl. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart

Liebsch G., U. Schirmer, J. Ihde, H. Denker, J. Müller (2006): Quasigeoidbestimmung für Deutschland. DVW-Schriftenreihe, No. 49, 127-146

Löser, H.-G. (1957): Untersuchungen zur praktischen Berechnung von Refraktionsanomalien für die Zwecke der Orientierung nach Sonnenhöhen. DGK B 36

- Marti, U. (1997): Das Geoid der Schweiz 1997. Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz Nr. 56. Schweizerische Geodätische Kommission
- Marti, U. und Schlatter, A. (2005): Festlegung des Höhenbezugsrahmens LHN95 und Berechnung des Geoidmodells CHGeo2005. Geomatik Schweiz 8/2005: 445-449
- PTB (2007): Schwereinformationssystem SIS. Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB), Braunschweig. URL: <http://www.ptb.de/de/org/1/11/115/index.htm>
- Ramsayer, K. (1967): Investigation on Errors in the Determination of Astronomical Refraction. Proceed.Intern. Symp. Figure of the Earth and Refraction, Wien. Veröffentlicht in: Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Sonderheft 25: 260-269
- Ramsayer, K. (1970): Handbuch der Vermessungskunde Band IIa - Geodätische Astronomie. Hrsg: Jordan/Eggert/Kneissl. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart
- Ruland, R. (2003): Persönliche Mitteilung
- Schlatter, A. (2007): Das neue Landeshöhennetz der Schweiz LHN95. Schweizerische Geodätische Kommission, Band 72. URL: <http://www.sgc.ethz.ch/sgc-volumes/sgk-72.pdf>
- Schlösser, M. und Herty, A. (2002): High Precision Survey and Alignment of Large Linear Colliders - Vertical Alignment. Proc. of 7th Int. Workshop on Accelerator Alignment (IWAA): 343-355, SPring-8, Japan
- Schlösser, M. (2004): Tutorial: Ein hydrostatisches Meßsystem mit in-situ-Kalibrierung. Ingenieurvermessung 2004, 14th International Conference on Engineering Surveying, Zürich
- Schürer, M. (1962): Das Geoid in der Schweiz. In: Festschrift anlässlich des hundertjährigen Bestehens der Schweizerischen Geodätischen Kommission, S. 94-105. Schweizerische Geodätische Kommission. URL: <http://www.sgc.ethz.ch/sgc-volumes/100JahreSGK.pdf>
- Schwarz, W. (1998): Die Vermessung von Teilchenbeschleunigern unter besonderer Berücksichtigung des geplanten, über 30 km langen Linearbeschleunigers. In: Schriftenreihe des DVW - Ingenieurvermessung aktuell, Bd. 32: 127-140
- Schwarz, W. (2007): Vermessungen im Sub-Millimeter-Bereich. Anwendungsbeispiele aus der Industrie und Präzisionsvermessung. AVN 7/2007: 253-262 und AVN 8-9/2007: 341-350
- Seeber, G. und Torge, W. (1985): Zum Einsatz transportabler Zenitkameras für die Lotabweichungsbestimmung. ZfV 110:439-450
- Torge, W. (2003): Geodäsie. 2. Auflage. W. de Gruyter, Berlin, New York
- Wirth, B. (1990): Höhensysteme, Schwerepotentiale und Niveaulächen: Systematische Untersuchungen zur zukünftigen terrestrischen und GPS-gestützten Höhenbestimmung in der Schweiz. Schweizerische Geodätische Kommission, Band 42. URL: <http://www.sgc.ethz.ch/sgc-volumes/sgk-42.pdf>
- Zomorrodian, H. (1968): Kritischer Vergleich einiger Methoden zur Bestimmung der Lotkrümmung. DGK C 118

### **Anschrift des Verfassers:**

Prof. (in Vertretung) Dr.-Ing. Christian Hirt  
 Department Geomatik  
 HafenCity Universität Hamburg  
 Hebebrandstr. 1  
 22297 Hamburg  
[christian.hirt@hcu-hamburg.de](mailto:christian.hirt@hcu-hamburg.de), [chris.hirt@web.de](mailto:chris.hirt@web.de)

Tab. 1: Genauigkeitsanforderungen für die Justierung der Höhenkomponente bei verschiedenen Beschleunigervarianten

Vorhaben	Höhengenauigkeit	Bezugsstrecke	Quelle
TESLA	0.2 mm	600 m	Schlösser und Herty (2002)
NLC	0.1 mm	150 m	Ruland (2003)
CLIC	0.01 mm	200 m	Becker et al. (2002)
ILC	0.2 mm	200 m	ILC (2007)

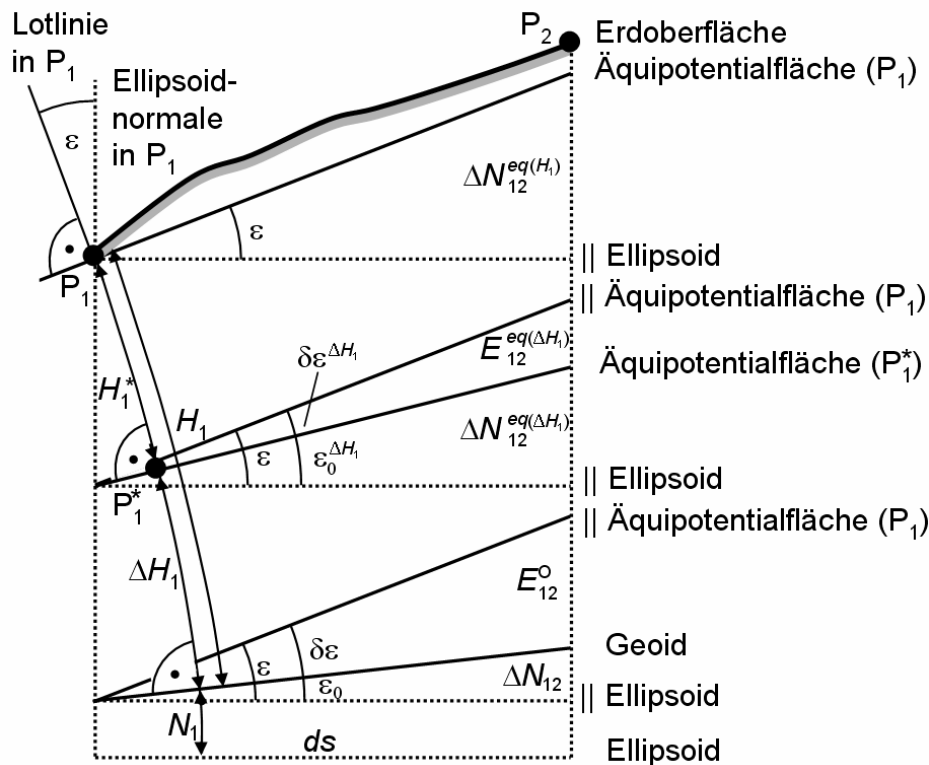


Abb. 1: Astronomisches Nivellement zur Bestimmung von Geoid- und Äquipotentialprofilen (nach Torge 2003).  $P_1, P_2$  Oberflächenpunkte,  $H_1$  Orthometrische Höhe von  $P_1$ ,  $N_1$  Geoidundulation,  $\varepsilon$  Oberflächenlotabweichung,  $ds$  Wegelement.  $P_1^*$  Schnittpunkt Lotlinie  $P_1$  und Äquipotentialfläche, die um  $\Delta H_1$  über dem Geoid und um  $H_1^*$  unter  $P_1$  liegt,  $\varepsilon_0$  Lotabweichung am Geoid,  $\delta\varepsilon$  Lotkrümmung.  $\Delta N_{12}$  Differenz der Geoidundulation,  $E_{12}^0$  orthometrische Korrektur,  $E_{12}^{eq(\Delta H_1)}$  modifizierte orthometrische Korrektur. Mit den hochgestellten Indizes  $\Delta H_1$  bzw.  $eq(\Delta H_1)$  werden die zum Geoid korrespondierenden Größen an der gesuchten Äquipotentialfläche bezeichnet. Man beachte, dass das Wegelement  $ds$  gleichermaßen für die Berechnung von Geoid- und Äquipotentialprofilen verwendet werden darf, da die Lotlinie und Ellipsoidnormale dicht beieinander liegen.

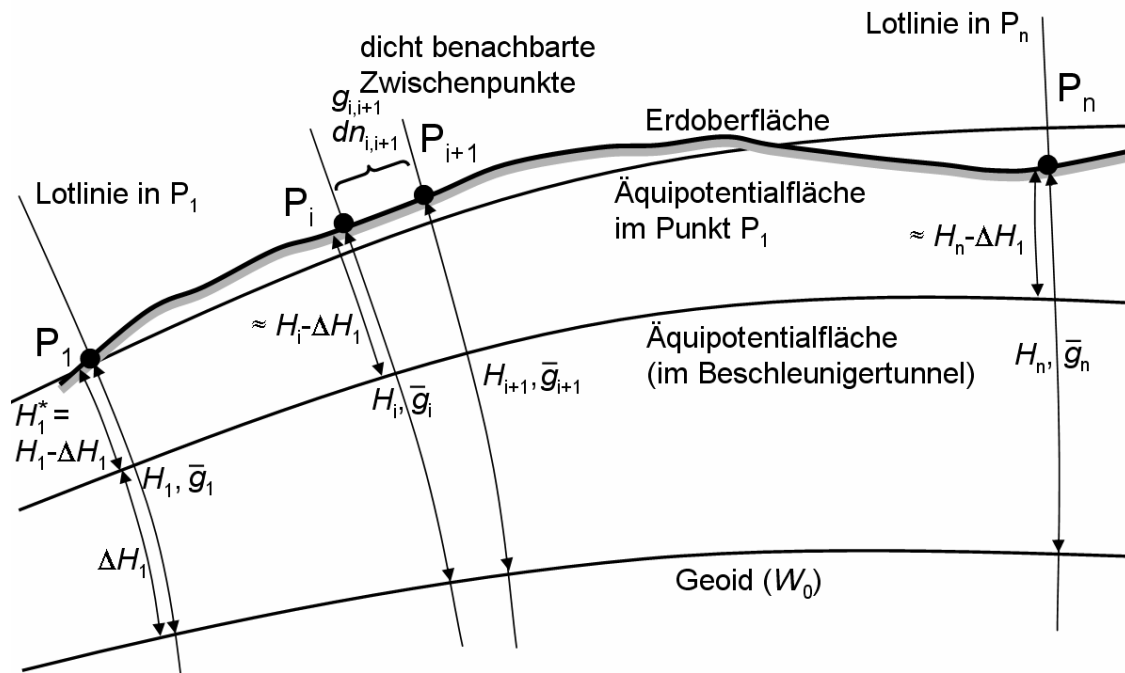


Abb.2: Höhen und Schwerewerte für die Berechnung der modifizierten orthometrischen Korrektur

Tab. 2: Genauigkeit für den Verlauf des Äquipotentialprofils  $\sigma_{\Delta N}$  für verschiedene Profillängen  $S$  in Abhängigkeit unterschiedlicher Genauigkeiten  $\sigma_\varepsilon$  für die Lotabweichungen und konstantem Stationsabstand  $ds = 50$  m. Angaben in [mm]

$\sigma_\varepsilon$ ["]	$S = 50$ m	$S = 200$ m	$S = 600$ m	$S = 1000$ m	$S = 7000$ m	$S = 10000$ m
0.05	0.012	0.024	0.042	0.054	0.139	0.172
0.08	0.019	0.039	0.067	0.087	0.222	0.275
0.10	0.024	0.049	0.084	0.109	0.278	0.344
Stationsanzahl $n$	2	5	13	21	141	201

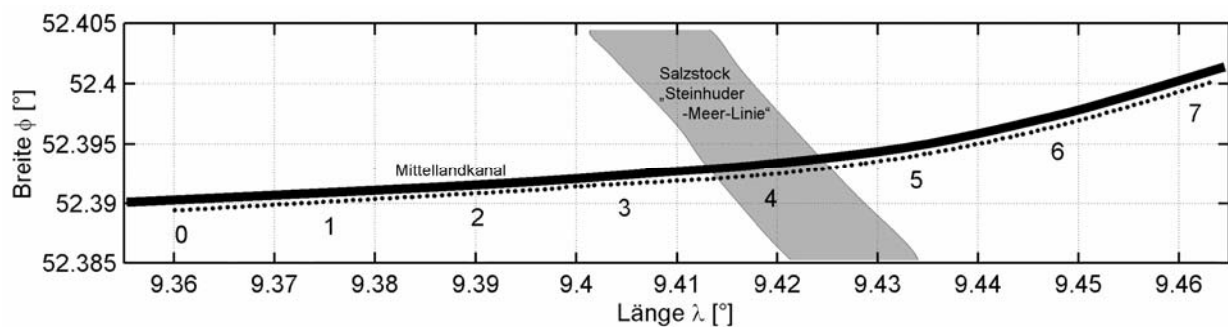


Abb. 3: Anordnung der 144 Lotabweichungsstationen entlang des Mittellandkanals. In der Grafik ist die Kilometrierung (0 bis 7 km) angegeben.



Abb. 4: Das digitale Zenitkameranystem TZK2-D (im Feldeinsatz 2005 am Mittellandkanal)

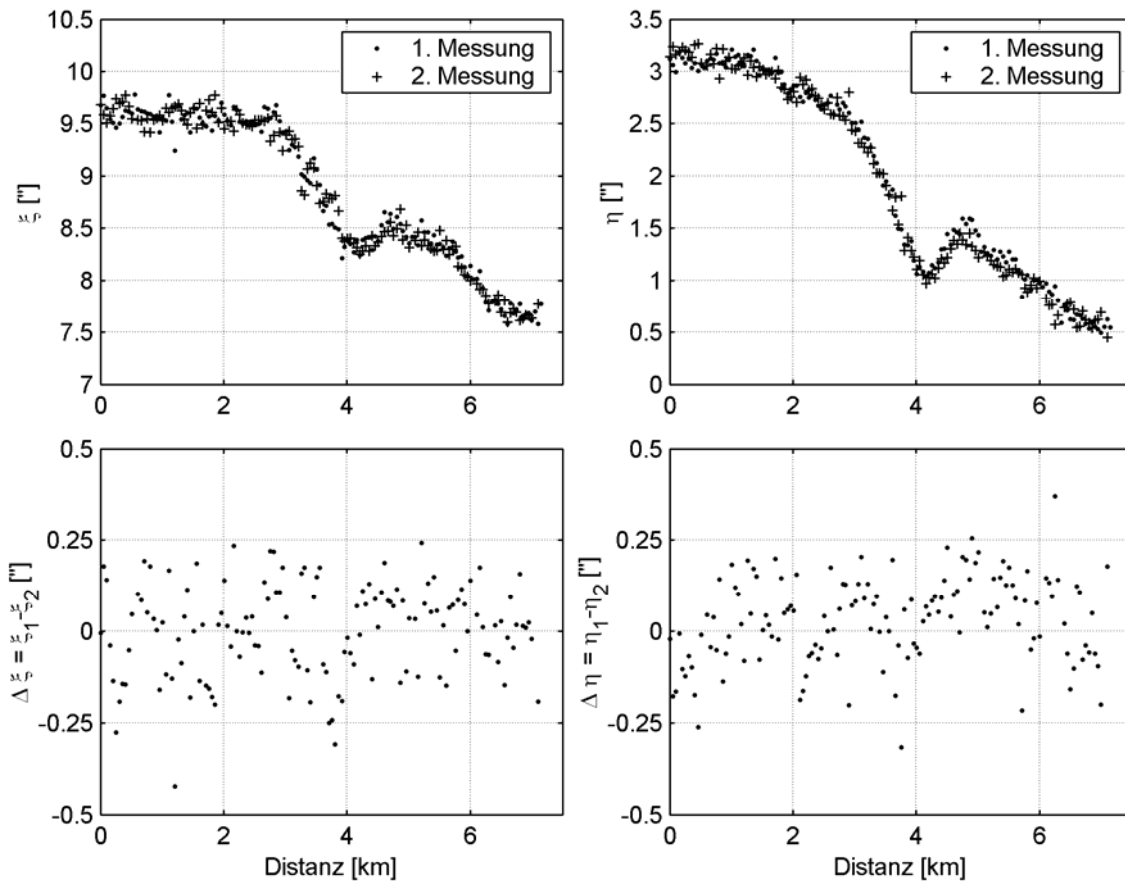


Abb. 5: Oben: Lotabweichungskomponenten ( $\xi$ ,  $\eta$ ) in Abhängigkeit der Profildistanz. Erste (zweite) Messung = Daten aus dem Messzeitraum Frühjahr 2005 (Herbst 2005). Unten: Differenzen ( $\Delta \xi, \Delta \eta$ ) auf 138 Lotabweichungsstationen.



Tab. 3: Statistik der Differenzen von 138 Lotabweichungsstationen, die mit dem digitalen Zenitkameranystem TZK2-D zweimal bestimmt wurden. RMS = root mean square, Stabw. =  $RMS/\sqrt{2}$

Komponente	Min	Max	Mittel	RMS	Stabw.
$\Delta\xi$ ["]	-0.423	0.242	0.000	0.126	0.089
$\Delta\eta$ ["]	-0.317	0.370	0.031	0.121	0.086

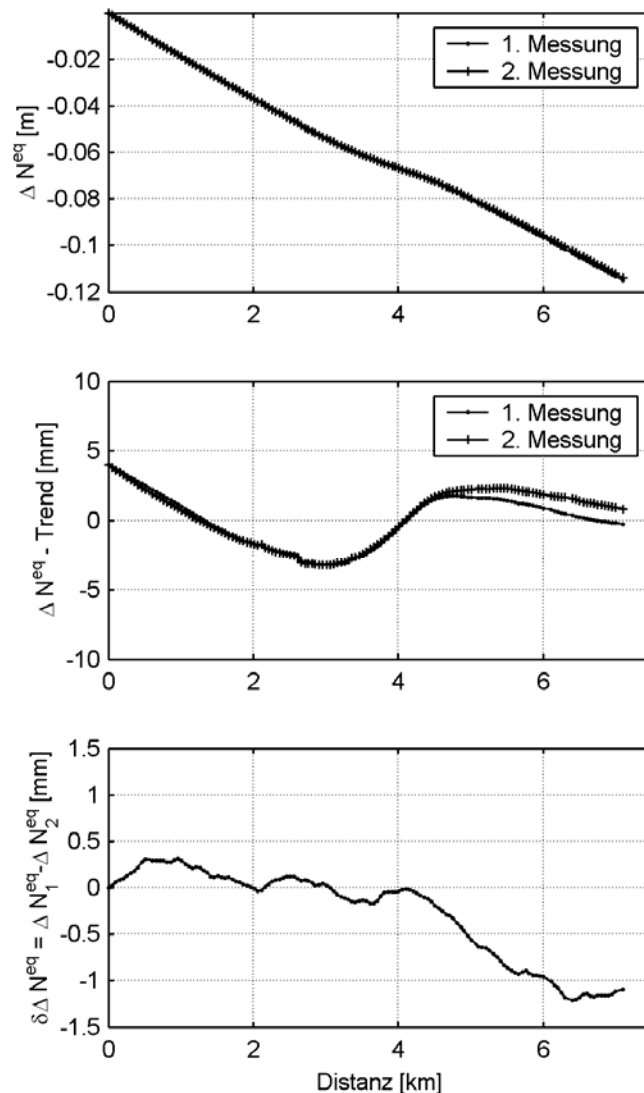


Abb. 6: Berechnete Äquipotentialprofile für die beiden Messzeiträume (1. Messung = Frühjahr 2005 und 2. Messung = Herbst 2005). Oben: Verlauf der beiden Äquipotentialprofile ohne Trendabzug. Mitte: Verlauf der beiden Äquipotentialprofile bei Abzug einer Regressionsgeraden. Unten: Differenz der beiden Berechnungen

Tab. 4: Statistik der Differenzen der beiden Äquipotentialprofile über die gesamte Profillänge und den Teilbereich 0-4000 m. RMS = root mean square, Stabw. =  $RMS/\sqrt{2}$ . Angaben in [mm]

Bereich	Min	Max	Mittel	RMS	Stabw.
0-7500 m	-1.22	0.31	-0.26	0.55	0.39
0- 4000 m	-0.17	0.31	0.07	0.15	0.11

Tab. 5: Genauigkeiten für die Bestimmung der Geometrie des Äquipotentialprofils über verschiedene Entfernungen  $S$ . Angegeben sind die empirisch berechneten Genauigkeiten auf Grundlage der gesamten Profillänge (0-7500 m), des Profilbereiches 0-4000 m sowie zum Vergleich die theoretischen Genauigkeiten (berechnet mit Gl. 9 mit  $\sigma_\varepsilon = 0.09''$ ). Angaben in [mm]

Standardabweichung	$S = 100$ m	$S = 200$ m	$S = 600$ m	$S = 1000$ m
$s_{\Delta\text{Neq}}$ (empirisch, 0-7500 m)	0.034	0.061	0.143	0.223
$s_{\Delta\text{Neq}}$ (empirisch, 0-4000 m)	0.029	0.049	0.096	0.119
$\sigma_{\Delta\text{Neq}}$ (theoretisch)	0.034	0.044	0.076	0.097

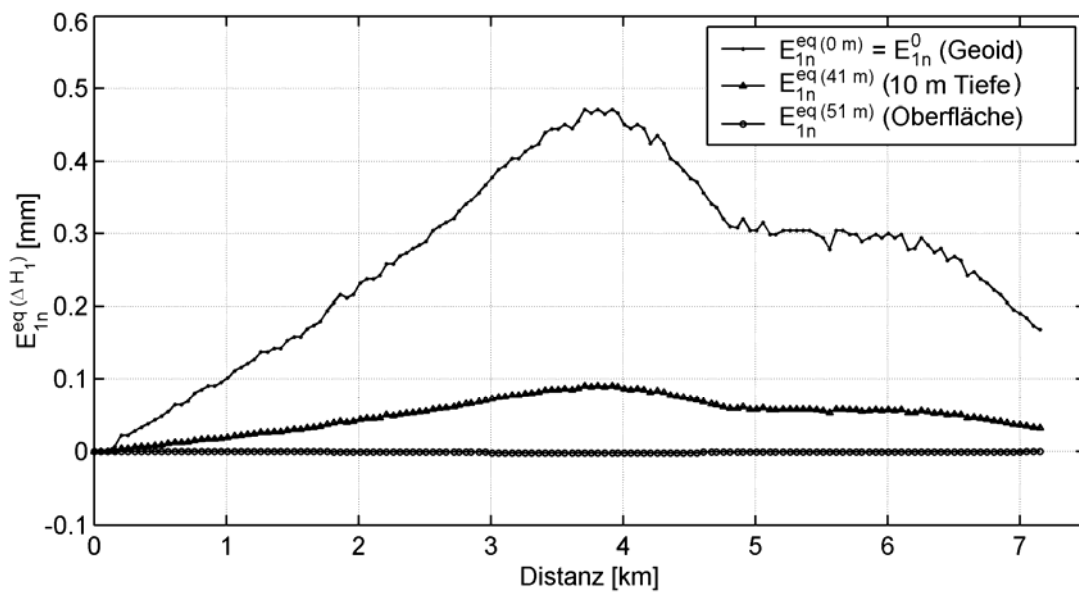


Abb. 7: Orthometrische und modifizierte orthometrische Korrektur im Profilverlauf. Dargestellt sind die Korrekturen an der Erdoberfläche (kleine Punkte), in 10 m Tiefe (Dreiecke) und am Geoid (große Punkte).