

Citation: Hirt C. (2008) Zur Berücksichtigung von Scherung und Umschlagwinkel bei der Neigungsmessung mit zweiachsigen Neigungssensoren. *Zeitschrift für Vermessungswesen* (zfv) 133: 266-273.

Zur Berücksichtigung von Scherung und Umschlagwinkel bei der Neigungsmessung mit zweiachsigen Neigungssensoren

Christian Hirt

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird ein neuer Auswertansatz für Neigungsmessungen mit zweiachsigen Neigungssensoren in zwei Lagen vorgestellt. Es werden Formeln zur strengen Berücksichtigung der Scherung zwischen den Sensorachsen hergeleitet sowie eine Modellbildung für Abweichungen vom 180°-Umschlagwinkel zwischen den beiden Messlagen vorgenommen. Für die Anwendung des vorgestellten Ansatzes ist die Bestimmung der Modellparameter Scherung und Umschlagwinkel notwendig. Das Modell kann für hochgenaue Neigungsmessungen mit zweiachsigen Neigungssensoren angewendet werden.

Summary

This paper deals with a new rigorous transformation model for (plumb line referred) tilt measurements using two-axial inclination sensors in two observation directions. The model accounts for deviations from the perpendicular orientation of the two sensor axes as well as for misalignment between both observation directions. The model requires numerical values both for the shearing between the sensor axes and the misalignment between both observation directions. Formulae are derived which can be applied for precise tilt measurements performed in two observation directions.

1 Einleitung

In der geodätischen Messtechnik wird unter dem Begriff der Neigung der Winkel verstanden, den eine Gerade (z.B. Stehachse eines Instrumentes oder Achse einer Maschine) mit der *Lotrichtung* bzw. mit der *Horizontalebene* im Messpunkt einschließt. Für die Bestimmung der Neigung einer Achse gegenüber der Horizontalebene kommen Neigungssensoren, z.B. Setzlibellen mit analoger Ablesung oder elektronische Neigungsmesser mit Pendel oder Flüssigkeitshorizont, zum Einsatz (siehe Schwarz 1995, S. 104 ff).

Da ein Neigungssensor bei der Bestimmung der Neigung n einer horizontalen Achse aufgrund einer immer vorhandenen, mehr oder weniger großen Nullpunktabweichung (Dejustierung) Δn nicht den Messwert 0 Bogensekunden anzeigen wird, führt man eine Neigungsmessung üblicherweise in zwei Lagen durch, die sich um 180° unterscheiden. Bezeichnet man die in Lage *I* und Lage *II* erfassten Messwerte mit n^I und n^{II} , so setzen sich diese – unter Vernachlässigung von zufälligen Messabweichungen – aus der (gesuchten) Neigung n und der Nullpunktabweichung Δn wie folgt zusammen:

$$n^I = n + \Delta n \quad n^{II} = -n + \Delta n. \quad (1)$$

Die Neigung n wird (in diesem Beispiel) in Lage *I* positiv und in Lage *II* negativ registriert; die Nullpunktabweichung Δn des Neigungssensors verfälscht dagegen in beiden Lagen

die gemessenen Neigungswerte n^I und n^{II} in gleicher Richtung. Jedem Geodäten ist bekannt, dass sich die gesuchte Neigung n der Achse als Hälfte der Differenz beider Neigungswerte n^I und n^{II} ergibt:

$$\frac{n^I - n^{II}}{2} = \frac{n + \Delta n - (-n + \Delta n)}{2} = n. \quad (2)$$

Für die Bestimmung der Nullpunktabweichung Δn gilt entsprechend:

$$\frac{n^I + n^{II}}{2} = \Delta n. \quad (3)$$

Besteht die Aufgabe darin, die Neigung einer Ebene gegenüber der Horizontalebene zu bestimmen, bzw. ist die räumliche Abweichung einer Instrumentenstehachse gegenüber der Lotrichtung gesucht, so werden Neigungswerte n_1 und n_2 in zwei Achsrichtungen 1 und 2 benötigt, die sich (azimutal) um 90° unterscheiden. Für die Messung werden in der Regel *zweiachsige Neigungssensoren* verwendet, die mit einer Dreheinrichtung für die Messung in zwei Lagen ausgestattet sind. Natürlich kann auch ein einachsiger Neigungssensor für die Bestimmung von Neigungswerten n_1 und n_2 durch Messung in zwei Achsrichtungen genutzt werden (z.B. Messsystem Rotlevel, siehe Schwarz 1995, S. 118).

Als Beispiel für den Einsatz von zweiachsigen Neigungssensoren sei die Erfassung der Stehachsneigung moderner Tachymeter (Witte und Schmidt 2004, S. 255 f) oder digitaler Zenitkamarasysteme (z.B. Hirt 2004, Bürki et al. 2004) genannt. Hier werden die Messelemente (Zenitdistanzen, Horizontalrichtungen bei Tachymetern bzw. Lotabweichungen bei Zenitkamarasystemen) durch rechnerische Korrektur der Stehachsneigung auf die Lotrichtung im Beobachtungspunkt bezogen. Bezeichnet man die mit einem zweiachsigen System in Lage *I* erfassten Neigungswerte mit n_1^I, n_2^I und in Lage *II* mit n_1^{II}, n_2^{II} , so ergeben sich die Neigungen in Achsrichtung 1 und 2 in Analogie zu Gl. (2):

$$n_1 = \frac{n_1^I - n_1^{II}}{2} \quad n_2 = \frac{n_2^I - n_2^{II}}{2}. \quad (4)$$

Die Anwendung von Gl. (4) setzt implizit voraus, dass

1. die beiden Achsrichtungen 1 und 2, in denen die Neigungswerte n_1^I, n_2^I, n_1^{II} und n_2^{II} erfasst werden, streng orthogonal zueinander sind (*Orthogonalitätsbedingung*) und
2. sich die Achsausrichtungen in Lage *I* und *II* streng um 180° voneinander unterscheiden (*180°-Bedingung*).

In der Praxis sind Abweichungen von den beiden Bedingungen häufig unvermeidbar. Als Ursache sei die endliche

Präzision genannt, mit der die Achsen 1 und 2 eines zweiachsigen Neigungsmesssystems zueinander orthogonal ausgerichtet (justiert) werden können. In der Folge weisen die beiden Achsen eine mehr oder weniger große Scherung auf. Beim Umschlag zwischen den Lagen I und II kann ein gewisses Spiel der Drehvorrichtung dazu führen, dass die 180°-Bedingung nicht exakt eingehalten wird. Für hohe Genauigkeitsforderungen ist es notwendig, Abweichungen von beiden Bedingungen rechnerisch zu berücksichtigen.

Der in diesem Beitrag vorgestellte Auswerteanatz modelliert einerseits Abweichungen von der 180°-Bedingung beim Umschlag zwischen den beiden Lagen, ohne Anforderungen an die Größe der Nullpunktabweichungen Δn_1 , Δn_2 der Neigungssensoren zu stellen. Andererseits werden Maßstabsfaktoren berücksichtigt, eine Scherung zwischen den Achsen der beiden Sensoren zugelassen und Formeln für die Rotation der Neigungswerte um beliebige Winkel angegeben, so dass das resultierende Auswertemodell affinen Charakter bekommt. Die Modellierung der Scherung von zweiachsigen Neigungsmesssystemen baut auf den Arbeiten von Hirt (2004) und Kahlmann et al. (2004) auf.

Ein in der Literatur bereits verfügbarer Ansatz (Chesi 1984, S. 57 f) zur Berücksichtigung von Abweichungen von der 180°-Bedingung kann nur unter der Voraussetzung angewendet werden, dass keine Nullpunktabweichungen Δn_1 , Δn_2 der Neigungssensoren vorliegen. Da diese Voraussetzung in der Praxis nur in den seltensten Fällen erfüllt ist, stellt die Lösung von Chesi einen Spezialfall dar und wird hier nicht weiter behandelt.

Der Fokus des vorliegenden Beitrages liegt auf der Berücksichtigung von Scherung und Umschlagwinkel im Rahmen der funktionalen Modellbildung (Abschnitt 2). Auf ein verfügbares Feldverfahren zur Bestimmung des Scher- und Umschlagwinkels wird in Abschnitt 3 im Zusammenhang mit der Neigungsmessung bei Zenitkamerabeobachtungen kurz eingegangen. Das vorgestellte Auswertemodell kann grundsätzlich für alle in der Praxis vorkommenden Fälle der hochgenauen Neigungsmessung mit zweiachsigen Neigungssensoren angewendet werden, sofern Kalibrierwerte für die Modellparameter Scherung und Umschlagwinkel vorliegen. Der vorgestellte Ansatz ist für solche Anwendungen relevant, bei denen geodätische Messgrößen (z.B. Zenitwinkel, Lotabweichungen) hochgenau auf die Lotrichtung bezogen werden müssen.

2 Das Auswertemodell

Nachfolgend werden Neigungswerte immer dann mit dem zusätzlichen Index * versehen, wenn es sich um Größen handelt, die in einem streng orthogonalen Koordinatensystem definiert sind.

Ausgangspunkt ist ein zweiachsiges Neigungsmesssystem mit den Achsen 1 und 2, das zur Neigungsmessung genutzt werden soll. Die Aufgabe bestehe darin, die Neigung einer Ebene (z.B. Drehkreis eines Instrumentes) gegenüber der Horizontalebene im Beobachtungspunkt zu bestimmen. Beide Sensoren des Zweiachssystems weisen Nullpunktabweichungen Δn_1 (Sensor 1) und Δn_2 (Sensor 2) auf. Die

beiden Achsen, entlang derer die Neigungen erfasst werden, schließen einen Scherwinkel ε ein (Abb. 1), der i. Allg. von 90° abweicht. In Lage I liefert das Messsystem die Neigungswerte n_1^I , n_2^I . Nach einem rechtsläufigen Umschlag um den Winkel α , der i. Allg. ungleich 180° ist (siehe Abb. 2, links), befindet sich das System in Lage II. Die zugehörigen Neigungswerte werden mit n_1^{II} , n_2^{II} bezeichnet. Gesucht sind die Neigungen n_{1*} und n_{2*} . Diese sind von den Nullpunktabweichungen befreit und im streng orthogonalen Koordinatensystem in Lage I definiert (vgl. Abb. 2, rechts).

Im Abschnitt 2.1 werden Gleichungen hergeleitet, die die gesuchten Neigungen n_{1*} und n_{2*} in Abhängigkeit der gemessenen Neigungswerte n_1^I , n_2^I , n_1^{II} und n_2^{II} ausdrücken. Die Herleitung erfolgt in Vektorschreibweise über Scher- und Drehmatrizen. Die abgeleiteten expliziten Gleichungen eignen sich einerseits zur direkten Berechnung der gesuchten Neigungen, andererseits z.B. für Analysen zur Varianz-Kovarianzfortpflanzung, da die *Unbekannten als Funktion der Beobachtungen* ausgedrückt werden.

Demgegenüber werden im Abschnitt 2.2 Gleichungen zur Berechnung der gemessenen Neigungswerte n_1^I , n_2^I , n_1^{II} und n_2^{II} aus den gesuchten Neigungen n_{1*} und n_{2*} angegeben, wobei die Herleitungen ihren Ausgangspunkt in der Falllinie der geneigten Ebene haben. Die Formulierung erfolgt im Sinne *Beobachtungen als Funktion der Unbekannten*, kann jedoch auch durch Inversion zur Berechnung der Unbekannten verwendet werden. Die angegebenen Ausdrücke können für die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen verwendet werden. Die beiden vorgestellten Ansätze sind gleichwertig und ineinander überführbar.

2.1 Herleitung über Scher- und Drehmatrizen

Aus den vier gemessenen Neigungswerten n_1^I , n_2^I , n_1^{II} und n_2^{II} werden die Neigungen n_{1*} und n_{2*} nachfolgend berechnet, indem für beide Lagen der Einfluss der Scherung ε korrigiert wird (Abschnitt 2.1.2) und anschließend eine strenge Auswertung der Zweilagennmessung unter Berücksichtigung des Umschlagwinkels α erfolgt (Abschnitt 2.1.3). Optional kann vor der Scherkorrektur eine Maßstabskorrektur erfolgen oder abschließend eine Rotation der Neigungen n_{1*} und n_{2*} in ein beliebiges Zielkoordinatensystem mit Gl. (15) durchgeführt werden.

2.1.1 Maßstabskorrektur

Falls das zweiachsige Neigungsmesssystem "rohe" Messwerte $n_{1(ra w)}^I$, $n_{2(ra w)}^I$, $n_{1(ra w)}^{II}$ und $n_{2(ra w)}^{II}$ liefert (z.B. Spannungen, die Maß für die Neigung sind), so gelingt eine Umrechnung in Neigungswerte n_1^I , n_2^I , n_1^{II} und n_2^{II} sehr einfach durch Verwendung der Maßstabsfaktoren m_1 und m_2 :

$$\begin{aligned} n_1^I &= m_1 n_{1(ra w)}^I & n_2^I &= m_2 n_{2(ra w)}^I \\ n_1^{II} &= m_1 n_{1(ra w)}^{II} & n_2^{II} &= m_2 n_{2(ra w)}^{II} \end{aligned} \quad (5)$$

Die Maßstabsfaktoren m_1, m_2 werden üblicherweise auf einem Neigungstisch (Libellenprüfer) bestimmt, wobei i.d.R.

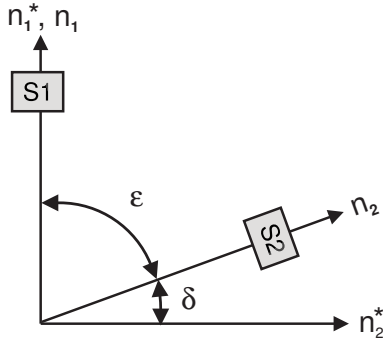


Abb. 1: Geschertes Koordinatensystem (n_1, n_2) und streng orthogonales Koordinatensystem (n_{1*}, n_{2*}) . Die Achsen des gescherten Systems zeigen an, in welche Richtung die beiden Sensoren S1 und S2 für Neigungen sensitiv sind.

ein linearer Zusammenhang zwischen Sensorsignal und Neigung angenommen wird. Beschreibungen zur genauen Maßstabskalibrierung von elektronischen Neigungssensoren werden beispielsweise von Geiger (1982), Ingensand (1985), Hirt (2004) sowie Hirt und Kahlmann (2004) gegeben. Es sei darauf hingewiesen, dass die Maßstabsfaktoren m_1, m_2 von der Querneigung der Neigungssensoren abhängen. Die Querneigung ist vor der Maßstabskalibrierung daher zu beseitigen.

2.1.2 Korrektur der Abweichung von der Orthogonalitätsbedingung (Scherkorrektur)

Für die Herleitung der Scherkorrektur sollen zunächst – unabhängig von der Messlage I oder II – zwei verschiedene Koordinatensysteme betrachtet werden. Abb. 1 zeigt das durch die Messrichtungen (Sensorachsen) der beiden Neigungssensoren 1 und 2 realisierte Koordinatensystem (n_1, n_2) . Beide Achsen kreuzen sich unter dem Scherwinkel ε . Als zweites Koordinatensystem wird ein (streng) orthogonales System (n_{1*}, n_{2*}) eingeführt, dessen Abszisse (n_{1*} -Achse) mit der Sensorachse 1 identisch ist. Man sieht, dass die Sensorachse 2 mit der n_{2*} -Achse des orthogonalen Systems einen Winkel von

$$\delta = 90^\circ - \varepsilon \quad (6)$$

umschließt. Eine Vorschrift für die Transformation der gescherten Neigungswerte (n_1, n_2) in streng orthogonale Neigungswerte (n_{1*}, n_{2*}) läßt sich leicht durch Umkehrung der Aufgabenstellung finden. Gegeben seien orthogonale Neigungswerte (n_{1*}, n_{2*}) , die in gescherte Neigungswerte (n_1, n_2) zu überführen sind. Die Rotation der orthogonalen Werte (n_{1*}, n_{2*}) um den Winkel δ (linksläufig, wenn δ positiv ist) liefert:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Wir können direkt den Ausdruck für n_2 ablesen:

$$n_2 = n_{2*} \cos \delta + n_{1*} \sin \delta \quad (8)$$

bzw. in Abhängigkeit des Scherwinkels ε :

$$n_2 = n_{2*} \sin \varepsilon + n_{1*} \cos \varepsilon. \quad (9)$$

Die Komponente n_1 darf natürlich nicht durch Rotation berechnet werden, da nur die n_2 -Achse bei dem gescherten Koordinatensystem rotiert wird. Es gilt vielmehr aufgrund der Identität der Abszissen beider Koordinatensysteme:

$$n_1 = n_{1*}. \quad (10)$$

Die Transformation der gescherten Neigungswerte (n_1, n_2) in orthogonale Werte (n_{1*}, n_{2*}) kann nun durch Umstellung der Gl. (9) und (10) nach n_{1*} und n_{2*} erfolgen.

Die erste Komponente n_{1*} ergibt sich direkt aus Gl. (10) und für die zweite Komponente n_{2*} findet sich durch Umstellung von Gl. (9)

$$n_{2*} = \frac{n_2}{\sin \varepsilon} - n_{1*} \frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} \quad (11)$$

und Einsetzen von Gl. (10) der Ausdruck (Hirt 2004, S. 114):

$$n_{2*} = \frac{n_2}{\sin \varepsilon} - \frac{n_1}{\tan \varepsilon}. \quad (12)$$

Die beiden Terme in Gl. (12) können geometrisch wie folgt interpretiert werden. Der Neigungssensor 2 registriert einen zu kleinen Anteil vom gesuchten Wert n_{2*} ; durch Division von n_2 mit $\sin \varepsilon$ erhält man den Neigungswert n_{2*} , den der Sensor 2 bei orthogonaler Ausrichtung messen würde. Mit dem zweiten Term kommt zum Ausdruck, dass aufgrund der Scherung ein Anteil von $1/\tan \varepsilon$ von n_1 registriert wird; n_{2*} wird von diesem aufgrund des negativen Vorzeichens vollständig befreit.

Unter Verwendung der Gl. (10) und (12) kann nun die Schermatrix \mathbf{S} aufgestellt werden, die die Transformation von gescherten Neigungswerten n_1^I, n_2^I in Lage I und n_1^{II}, n_2^{II} in Lage II – getrennt für beide Lagen – in streng orthogonale Neigungswerte $n_{1*}^I, n_{2*}^I, n_{1*}^{II},$ und n_{2*}^{II} erlaubt:

$$\mathbf{S}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{\tan \varepsilon} & \frac{1}{\sin \varepsilon} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} n_{1*}^I \\ n_{2*}^I \end{pmatrix} = \mathbf{S}(\varepsilon) \cdot \begin{pmatrix} n_1^I \\ n_2^I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n_{1*}^{II} \\ n_{2*}^{II} \end{pmatrix} = \mathbf{S}(\varepsilon) \cdot \begin{pmatrix} n_1^{II} \\ n_2^{II} \end{pmatrix}.$$

Die geometrische Situation vor und nach der Scherkorrektur ist in Abb. 2 verdeutlicht. Eine Diskussion zur Rolle der Nullpunktabweichungen $\Delta n_1, \Delta n_2$ bei der Schertransformation findet sich in Abschnitt 2.1.4.

2.1.3 Berücksichtigung der Abweichung von der 180°-Bedingung

Die Berechnung von (orthogonalen) Neigungswerten n_{1*} und n_{2*} aus den (um die Scherung korrigierten) Neigungswerten $n_1^I, n_2^I, n_1^{II},$ und n_2^{II} ist nicht trivial, wenn beim Umschlag zwischen Lage I und Lage II ein anderer Winkel α als 180° realisiert wird und die Neigungssensoren 1 und 2 Nullpunktabweichungen Δn_1 sowie Δn_2 aufweisen. In solchen Fällen gelingt es nicht, die gesuchten Neigungen mit der einfachen Gl. (4) zu berechnen.

Nachfolgend wird die Lösung für den *allgemeinen Fall der Neigungsmessung in zwei Lagen* hergeleitet, also für

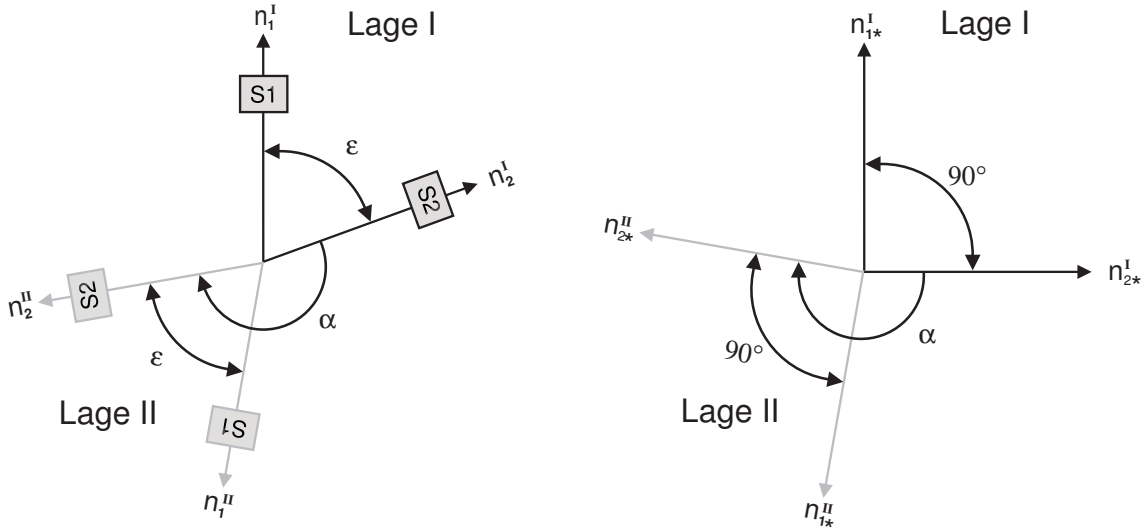


Abb. 2: Links: Geschertes Koordinatensystem in Lage I (schwarz) und II (grau). Rechts: Orthogonales Koordinatensystem in Lage I und II nach der Scherkorrektur. Die Koordinatensysteme in Lage I und Lage II sind jeweils um den Umschlagwinkel α verdreht.

Umschlagwinkel α , die von 180° abweichen dürfen und Neigungswerte mit beliebigen Nullpunktabweichungen Δn_1 , Δn_2 . Gegeben seien in Lage I die Neigungswerte n_{1*}^I, n_{2*}^I , die sich unter Vernachlässigung von zufälligen Messabweichungen aus den gesuchten Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) und den Nullpunktabweichungen $(\Delta n_{1*}, \Delta n_{2*})$ im orthogonalen System zusammensetzen:

$$\begin{pmatrix} n_{1*}^I \\ n_{2*}^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta n_{1*} \\ \Delta n_{2*} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

An dieser Stelle soll ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass sich die Nullpunktabweichungen $(\Delta n_{1*}, \Delta n_{2*})$ auf das streng orthogonale Koordinatensystem beziehen, in das die gescherten Neigungswerte inklusive der Nullpunktabweichungen der Neigungssensoren $(\Delta n_1, \Delta n_2)$ mit Gl. (13) transformiert wurden. Folglich sind Δn_{1*} und Δn_1 identisch, Δn_{2*} und Δn_2 weichen jedoch aufgrund der vorgenommenen Schertransformation voneinander ab, siehe auch Erläuterungen in Abschnitt 2.1.4.

Für Lage II kann man die Neigungswerte n_{1*}^{II}, n_{2*}^{II} ebenfalls in Abhängigkeit der Neigungen und Nullpunktabweichungen ausdrücken, wobei die Rotationsmatrix \mathbf{R}

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (15)$$

mit dem Umschlagwinkel α auf die Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) angewendet wird. Die Rotationsmatrix \mathbf{R} , wie sie in Gl. (15) angegeben ist, dreht bei positivem Argument α das Koordinatensystem im Uhrzeigersinn. Damit ist sie geeignet, das Koordinatensystem der Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) von Lage I rechtsläufig in Lage II zu drehen (vgl. Abb. 2, rechts). Es ergibt sich für die Neigungswerte n_{1*}^{II}, n_{2*}^{II} :

$$\begin{pmatrix} n_{1*}^{II} \\ n_{2*}^{II} \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta n_{1*} \\ \Delta n_{2*} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Anmerkung 1: Es ist entscheidend, dass die Rotationsmatrix \mathbf{R} nur auf die Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) angewendet werden darf, nicht jedoch auf die Nullpunktabweichungen $(\Delta n_{1*}, \Delta n_{2*})$. Die Nullpunktabweichungen verfälschen die gemessenen Neigungswerte in beiden Lagen in die gleiche Richtung und sind vom Umschlagwinkel α unabhängig.

Anmerkung 2: Man erkennt durch Einsetzen von $\alpha = 180^\circ$ in Gl. (16) leicht die in der Einleitung beschriebene Tatsache, dass die Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) in Lage II bei exakter Einhaltung der 180° -Bedingung mit negativem Vorzeichen registriert werden:

$$\begin{pmatrix} n_{1*}^{II} \\ n_{2*}^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_{1*} \\ -n_{2*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta n_{1*} \\ \Delta n_{2*} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Wir wollen nun die Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) in Abhängigkeit der vier Messwerte $n_{1*}^I, n_{2*}^I, n_{1*}^{II}$ und n_{2*}^{II} und des Umschlagwinkels α – der von 180° abweichen darf – berechnen. Dazu stellen wir Gl. (14) nach den Nullpunktabweichungen um:

$$\begin{pmatrix} \Delta n_{1*} \\ \Delta n_{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{1*}^I \\ n_{2*}^I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix} \quad (18)$$

und setzen diesen neuen Ausdruck in Gl. (16) ein:

$$\begin{pmatrix} n_{1*}^{II} \\ n_{2*}^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{1*} \cos \alpha + n_{2*} \sin \alpha \\ -n_{1*} \sin \alpha + n_{2*} \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{1*}^I \\ n_{2*}^I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Die Nullpunktabweichungen $(\Delta n_{1*}, \Delta n_{2*})$ sind – unter der Voraussetzung, dass sie sich zwischen dem Umschlag von Lage I nach Lage II nicht verändert haben – nun eliminiert. Die Terme in Gl. (19) können nachfolgend etwas umsortiert werden, so dass auf der linken Seite unsere vier gemessenen Neigungswerte stehen:

$$\begin{pmatrix} n_{1*}^{II} - n_{1*}^I \\ n_{2*}^{II} - n_{2*}^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{1*} \cos \alpha + n_{2*} \sin \alpha - n_{1*} \\ -n_{1*} \sin \alpha + n_{2*} \cos \alpha - n_{2*} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} n_{1*} \cos \alpha + n_{2*} \sin \alpha \\ -n_{1*} \sin \alpha + n_{2*} \cos \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos \alpha - 1) & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & (\cos \alpha - 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix}.$$

Nach Einführung der Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} a_1 &= n_{1*}^{II} - n_{1*}^I & a_2 &= n_{2*}^{II} - n_{2*}^I \\ b_1 &= \cos \alpha - 1 & b_2 &= -\sin \alpha \\ c_1 &= \sin \alpha & c_2 &= \cos \alpha - 1 \end{aligned} \quad (21)$$

erhält man ein einfaches lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

dessen Lösung sich sofort durch Linksmultiplikation mit der Inversen der Koeffizientenmatrix (b_1 bis c_2) ergibt:

$$\begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \begin{pmatrix} c_2 & -c_1 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Für die gesuchten Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) erhält man die wichtigen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} n_{1*} &= \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \\ &= \frac{(\cos \alpha - 1)(n_{1*}^{II} - n_{1*}^I) - \sin \alpha (n_{2*}^{II} - n_{2*}^I)}{2(1 - \cos \alpha)} \\ n_{2*} &= \frac{-b_2 a_1 + b_1 a_2}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \\ &= \frac{(\cos \alpha - 1)(n_{2*}^{II} - n_{2*}^I) + \sin \alpha (n_{1*}^{II} - n_{1*}^I)}{2(1 - \cos \alpha)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Mit Gl. (24) lassen sich Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) direkt als Funktion der vier Neigungswerte $n_{1*}^I, n_{2*}^I, n_{1*}^{II}$, und n_{2*}^{II} , die paarweise entlang orthogonaler Achsen gemessen wurden, und des Umschlagwinkels α berechnen, der von 180° abweichen darf. Die berechneten Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) beziehen sich auf das orthogonale Koordinatensystem aus Lage I.

Es soll zum Ende dieses Abschnittes noch darauf hingewiesen werden, dass sich die in der Einleitung angegebene Gl. (4), die bei einem fehlerfreien Umschlag zwischen den beiden Lagen gültig ist, aus Gl. (24) durch Einsetzen von $\alpha = 180^\circ$ ergibt. Man erkennt auch, dass die Nenner in Gl. (24) den Wert 0 annehmen, wenn $\alpha = 0^\circ$ beträgt und die Gleichungen dann natürlich nicht lösbar sind.

2.1.4 Rolle der Nullpunktabweichungen im Auswertemodell

In der Einleitung wurde gesagt, dass das Auswertemodell keine Anforderungen an die Größe der Nullpunktabweichungen $\Delta n_1, \Delta n_2$ der Neigungssensoren stellt, d.h. das Modell bei unbekanntem Nullpunktabweichungen richtige Neigungen n_{1*}, n_{2*} liefert.

Die Nullpunktabweichungen $\Delta n_1, \Delta n_2$ der Neigungssensoren, die ja Bestandteil der gemessenen Neigungen n_{1*}^I, n_{2*}^I ,

n_{1*}^{II} und n_{2*}^{II} sind, werden durch Anwendung der Schermatrix \mathbf{S} (Gl. 13) auf die gemessenen Neigungen automatisch in streng orthogonale Nullpunktabweichungen $\Delta n_{1*}, \Delta n_{2*}$ umgewandelt:

$$\begin{aligned} \Delta n_{1*} &= \Delta n_1 \\ \Delta n_{2*} &= \frac{\Delta n_2}{\sin \varepsilon} - \frac{\Delta n_1}{\tan \varepsilon}. \end{aligned} \quad (25)$$

Aus Gl. (25) ist ersichtlich, dass Δn_{1*} direkt der Nullpunktabweichung vom ersten Neigungssensor entspricht, Δn_{2*} dagegen geometrisch nicht deutbar ist, da gemischte Terme (trigonometrische Funktionen und Anteil Δn_1) enthalten sind. Die Komponenten $\Delta n_{1*}, \Delta n_{2*}$ sind – mit gleichem Vorzeichen – sowohl in den streng orthogonalen Neigungswerten der ersten Lage n_{1*}^I, n_{2*}^I , als auch in denen der zweiten Lage (n_{1*}^{II}, n_{2*}^{II}) enthalten.

Bei der Berechnung der Neigungswerte werden die Nullpunktabweichungen $\Delta n_{1*}, \Delta n_{2*}$ in Gl. (21) durch Differenzbildung der orthogonalen Neigungswerte aus der ersten und zweiten Lage (Hilfsgrößen a_1 und a_2) streng eliminiert. Daher kann das Auswertemodell auch bei unbekanntem Nullpunktabweichungen problemlos angewendet werden.

Besteht z.B. für Analysezwecke die Aufgabe, die Nullpunktabweichungen $\Delta n_1, \Delta n_2$ der Neigungssensoren zu berechnen, so sind zuerst die Nullpunktabweichungen $\Delta n_{1*}, \Delta n_{2*}$ im orthogonalen System mit Gl. (18) zu berechnen und dann in Nullpunktabweichungen im gescherten Koordinatensystem (durch die Neigungssensoren realisiert) zu transformieren. Dies geschieht in Anlehnung an Gl. (9) und (10):

$$\begin{aligned} \Delta n_1 &= \Delta n_{1*} \\ \Delta n_2 &= \Delta n_{2*} \sin \varepsilon + \Delta n_{1*} \cos \varepsilon. \end{aligned} \quad (26)$$

2.2 Herleitung über die Falllinie

Jede geneigte Ebene hat eine Falllinie, in der eine maximale Neigung n_{max} gemessen werden kann. Man erhält den Betrag n_{max} in Abhängigkeit der Neigungen (n_{1*}, n_{2*}):

$$n_{max} = \sqrt{n_{1*}^2 + n_{2*}^2}. \quad (27)$$

Die Richtung ω der Falllinie, bezogen auf die n_{1*} -Achse, ergibt sich durch

$$\omega = \arctan \left(\frac{n_{2*}}{n_{1*}} \right). \quad (28)$$

Die beiden Größen n_{max} und ω entsprechen der Darstellung der Neigung in polaren Koordinaten (vgl. Abb. 3). Die Neigung n_γ in einer beliebigen Richtung kann über

$$n_\gamma = n_{max} \cos \gamma \quad (29)$$

berechnet werden, wobei der Winkel γ auf die Richtung der Falllinie bezogen ist. Setzt man z.B. für γ den Winkel ω ein, so erhält man die Neigung in Richtung der n_{1*} -Achse und für den Winkel $90^\circ - \omega$ entsprechend die Neigung in Richtung der n_{2*} -Achse. Es ergeben sich die (kartesischen) Neigungskomponenten (n_{1*}, n_{2*}) als Funktion der polaren Elemente n_{max} und ω :

$$n_{1*} = n_{max} \cos \omega \quad n_{2*} = n_{max} \sin \omega. \quad (30)$$

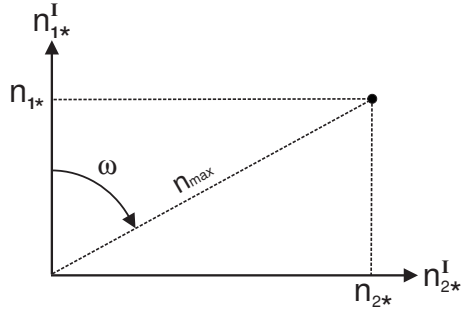


Abb. 3: Neigung einer Ebene in polaren Koordinaten (n_{max} und ω) und kartesischen Koordinaten (n_{1*} , n_{2*})

Ausgehend von Gl. (29) ist es möglich, die registrierten Neigungswerte n_1^I , n_2^I , n_1^{II} und n_2^{II} in Richtung der gesicherten Sensorachsen in Lage I und Lage II (vgl. Abb. 2 links) in Abhängigkeit der Winkel ω , α und ε sowie der Nullpunktabweichungen Δn_1 und Δn_2 zu konstruieren (Schwarz 2008):

$$\begin{aligned} n_1^I &= n_{max} \cos(-\omega) + \Delta n_1 & (31) \\ n_2^I &= n_{max} \cos(-\omega + \varepsilon) + \Delta n_2 \\ n_1^{II} &= n_{max} \cos(-\omega + \alpha) + \Delta n_1 \\ n_2^{II} &= n_{max} \cos(-\omega + \alpha + \varepsilon) + \Delta n_2. \end{aligned}$$

Auf das gleiche Ergebnis kommt man auch durch Anwendung der Rotationsmatrix (Gl. 16) mit dem Winkel $-\alpha$ und der inversen Schertransformation (Gl. 9) auf die Neigungen (n_{1*} , n_{2*}) sowie anschließender Addition der Nullpunktabweichungen Δn_1 und Δn_2 .

In dem zunächst nichtlinearen Gleichungssystem (31) sind die Größen n_{max} , ω , Δn_1 und Δn_2 Unbekannte und n_1^I , n_2^I , n_1^{II} und n_2^{II} die Beobachtungen. Eine Linearisierung von Gl. (31) gelingt durch Anwendung des Additionstheorems für die cos-Funktion (Schwarz 2008)

$$\begin{aligned} n_1^I &= n_{max} \cos \omega + \Delta n_1 & (32) \\ n_2^I &= n_{max} \cos \omega \cos \varepsilon + n_{max} \sin \omega \sin \varepsilon + \Delta n_2 \\ n_1^{II} &= n_{max} \cos \omega \cos \alpha + n_{max} \sin \omega \sin \alpha + \Delta n_1 \\ n_2^{II} &= n_{max} \cos \omega \cos(\alpha + \varepsilon) + \\ & n_{max} \sin \omega \sin(\alpha + \varepsilon) + \Delta n_2 \end{aligned}$$

und anschließende Substitution mit den Beziehungen aus Gl. (30)

$$\begin{aligned} n_1^I &= n_{1*} + \Delta n_1 & (33) \\ n_2^I &= n_{1*} \cos \varepsilon + n_{2*} \sin \varepsilon + \Delta n_2 \\ n_1^{II} &= n_{1*} \cos \alpha + n_{2*} \sin \alpha + \Delta n_1 \\ n_2^{II} &= n_{1*} \cos(\alpha + \varepsilon) + n_{2*} \sin(\alpha + \varepsilon) + \Delta n_2. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ergibt sich schließlich:

$$\begin{pmatrix} n_1^I \\ n_2^I \\ n_1^{II} \\ n_2^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos \varepsilon & \sin \varepsilon & 0 & 1 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 1 & 0 \\ \cos(\alpha + \varepsilon) & \sin(\alpha + \varepsilon) & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \\ \Delta n_1 \\ \Delta n_2 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Dieses lineare Gleichungssystem drückt die beobachteten Neigungswerte n_1^I , n_2^I , n_1^{II} und n_2^{II} in Abhängigkeit der unbekanntenen Neigungen n_{1*} und n_{2*} (im orthogonalen Koordinatensystem in Lage I) und den unbekanntenen Nullpunktabweichungen Δn_1 und Δn_2 der Neigungssensoren aus. Durch Linksmultiplikation von (34) mit der inversen Koeffizientenmatrix können die Unbekannten berechnet werden. Eine manuelle Auflösung von (34) führt nach einigen Umformungen, die hier nicht dargestellt werden sollen, auf die im Abschnitt 2.1 dargestellte funktionale Modellierung, bei der die Unbekannten als Funktion der Beobachtungen ausgedrückt wurden. Beide Ansätze sind somit zueinander äquivalent.

2.3 Zahlenbeispiel

Die vorgestellte strenge Auswerteprozedur für Neigungsmessungen in zwei Lagen soll mit einem einfachen Zahlenbeispiel verdeutlicht werden. Gegeben seien Neigungswerte, die mit einem zweiachsigen Neigungsmesssystem in zwei Lagen erfasst wurden und bereits maßstabskorrigiert sind:

$$\begin{aligned} n_1^I &= 10'' & n_2^I &= 20'' \\ n_1^{II} &= -30'' & n_2^{II} &= -40''. \end{aligned}$$

Die beiden Achsen 1 und 2 schließen einen Scherwinkel

$$\varepsilon = 89^\circ$$

ein und der Umschlagwinkel zwischen den beiden Lagen I und II beträgt

$$\alpha = 179^\circ.$$

Beim ersten Ansatz (Abschnitt 2.1) werden die Neigungswerte n_1^I , n_2^I in Lage I und n_1^{II} , n_2^{II} im gesicherten Koordinatensystem mit Gl. (13) – getrennt für beide Lagen – in Neigungswerte n_{1*}^I , n_{2*}^I , n_{1*}^{II} und n_{2*}^{II} im streng orthogonalen Koordinatensystem transformiert. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} n_{1*}^I &= 10'' & n_{2*}^I &= 19''8285 \\ n_{1*}^{II} &= -30'' & n_{2*}^{II} &= -39''4824. \end{aligned}$$

Mit Gl. (21) werden die Hilfsgrößen a_1 bis c_2 berechnet:

$$\begin{aligned} a_1 &= -40'' & b_1 &= -1.9998 & c_1 &= 0.0175 \\ a_2 &= -59.3109 & b_2 &= -0.0175 & c_2 &= -1.9998. \end{aligned}$$

Für die gesuchten Neigungen (n_{1*} , n_{2*}) findet sich mit Gl. (24):

$$n_{1*} = 20''2588 \quad n_{2*} = 29''4809.$$

Die Nullpunktabweichungen Δn_1 und Δn_2 der beiden Sensoren können über Gl. (26) berechnet werden:

$$\Delta n_1 = -10''2588 \quad \Delta n_2 = -9''8300.$$

Eine alternative Lösung der Aufgabe ist durch Auflösung von Gl. (34) nach den Unbekannten möglich (vgl. Abschnitt 2.2). Die Koeffizientenmatrix aus Gl. (34) lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0175 & 0.9998 & 0 & 1 \\ -0.9998 & 0.0175 & 1 & 0 \\ -0.0349 & -0.9994 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

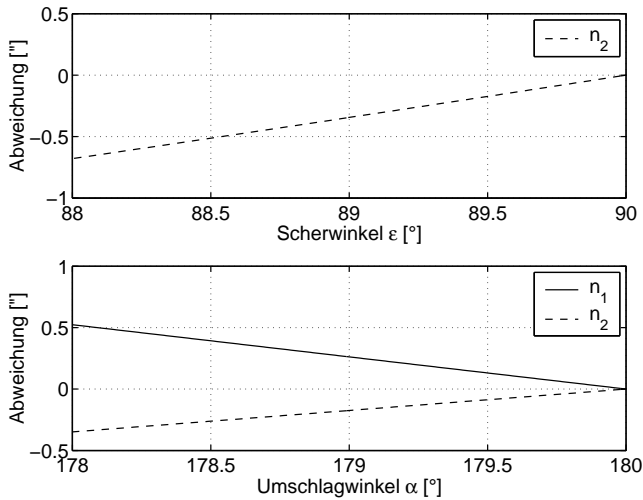


Abb. 4: Abweichungen zwischen dem konventionellen Auswertansatz und dem neuen Auswertmodell bei der Berechnung von Neigungen. Oben: Einfluss des Scherwinkels ε . Unten: Einfluss des Umschlagwinkels α . Bei der oberen Grafik wurde der Umschlagwinkel $\alpha = 180^\circ$ gesetzt und der Scherwinkel ε variiert. Für die erste Neigungskomponente n_1 ist die Abweichung immer 0. Bei der unteren Grafik wurde dagegen der Scherwinkel $\varepsilon = 90^\circ$ gesetzt und α variiert. Für beide Berechnungen wurden Nullpunktabweichungen von $-10''$ (Sensor 1) und $-10''$ (Sensor 2) sowie Neigungswerte von $+20''$ (Sensor 1) und $+30''$ (Sensor 2) angesetzt. Die gezeigten Abweichungen überlagern sich additiv.

Für die Inverse der Koeffizientenmatrix ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0.4999 & 0.0044 & -0.4999 & -0.0044 \\ -0.0131 & 0.5001 & 0.0131 & -0.5001 \\ 0.5001 & -0.0044 & 0.4999 & 0.0044 \\ 0.0044 & 0.4999 & -0.0044 & 0.5001 \end{pmatrix} \quad (35)$$

und für den Unbekanntenvektor durch Linksmultiplikation des Vektors der beobachteten Neigungswerte mit (35):

$$\begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \\ \Delta n_1 \\ \Delta n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20''2588 \\ 29''4809 \\ -10''2588 \\ -9''8300 \end{pmatrix}.$$

Die Werte für die Unbekannten stimmen bei beiden Ansätzen überein. Wendet man zur Berechnung der Neigungen dagegen den konventionellen Ansatz (Gl. 4) an, bei dem weder Scherung der Sensorachsen noch Abweichungen von der 180° -Bedingung berücksichtigt werden, so erhält man $20''$ für die Neigung n_1 und $30''$ für n_2 . Es zeigen sich bei dem gewählten Beispiel Abweichungen zwischen dem strengen Auswertmodell und dem konventionellen Ansatz von etwa $0''25$ sowie $0''5$, die bei hohen Genauigkeitsanforderungen nicht vernachlässigbar sind.

3 Diskussion

Mit dem in diesem Beitrag vorgestellten Auswertmodell lassen sich Neigungsmessungen mit zweiachsigen Messsystemen

streng auswerten. Der Modellansatz berücksichtigt einerseits den Scherwinkel ε zwischen den Sensorachsen. Andererseits werden Abweichungen von der 180° -Bedingung beim Umschlag zwischen den beiden Lagen zugelassen und rechnerisch unter Verwendung des Umschlagwinkels α korrigiert.

Es wurden zwei unterschiedliche Herleitungen gezeigt, die beide zu äquivalenten Ergebnissen führen. Beim ersten Ansatz (Abschnitt 2.1) wurde zuerst der Schereinfluss korrigiert (Gl. 24) und danach der Einfluss des Umschlagwinkels (Gl. 13). Beim zweiten Ansatz (Abschnitt 2.2), der von Schwarz (2008) vorgeschlagen wurde, werden beide Einflüsse in einem Schritt korrigiert, eine Lösung ergibt sich durch Inversion der Koeffizientenmatrix in Gl. (34). Während der erste Ansatz im Sinne Unbekannte als Funktion der Beobachtungen formuliert ist, drückt der zweite Ansatz die Beobachtungen als Funktion der Unbekannten aus.

Vor der praktischen Anwendung des neuen Modellansatzes ist es notwendig, Werte für die beiden Parameter ε und α zu ermitteln. Dies kann grundsätzlich über geeignete Kalibrierverfahren (Scherwinkel ε) oder z.B. über die Nutzung von Messwertgebern (Umschlagwinkel α) geschehen. Auf die Entwicklung eines Laborverfahrens für die Bestimmung der Modellparameter ε und α wird im Rahmen dieses Beitrages nicht eingegangen; ein Feldverfahren zur Kalibrierung ist dagegen bei Zenitkamerasystemen schon verfügbar und getestet.

Das vorgestellte Auswertmodell wird seit 2005 routinemäßig für die Auswertung von hochgenauen Neigungsmessungen verwendet, die im Rahmen der Lotrichtungs- und Lotabweichungsbestimmung mit dem Hannoverschen Zenitkamerasystem (Hirt 2004) durchgeführt werden. Die Bestimmung des Scherwinkels ε erfolgt bei dieser Anwendung durch ein spezielles Kalibrierverfahren, der zälestischen Kalibrierung. Dabei wird der Parameter ε aus einer Vielzahl von Neigungsmessungen, die astrometrisch ermittelten Neigungen gegenübergestellt werden, durch Ausgleichung ermittelt. Eine detaillierte Beschreibung des zälestischen Kalibrierverfahrens findet sich in Hirt (2004), S. 108 ff. Der Umschlagwinkel α , der zwischen den Lagen *I* und *II* bei Zenitkamera-beobachtungen realisiert wird, steht direkt als Differenz von astronomischen Azimuten zur Verfügung, die für beide Lagen durch astrometrische Auswertung ermittelt werden.

Abb. 4 zeigt die Abweichungen, die sich zwischen dem konventionellen Auswertansatz (Gl. 4) und dem neu entwickelten Auswertmodell (Abschnitt 2) bei der Berechnung von Neigungen bei verschiedenen Scherwinkeln ε und Umschlagwinkeln α ergeben. Die Abweichungen können – je nach Größe der Neigungswerte und der Parameter ε und α – bis in der Größenordnung von $1''$ liegen (vgl. auch Zahlenbeispiel im Abschnitt 2.3), sofern Scherung und Umschlag nicht mechanisch justierbar sind. Bei Verfügbarkeit von Justiervorrichtungen sollte dagegen eine laterale Justiergenauigkeit von wenigen 0.1 mm und besser erreichbar sein. Dies entspricht bei Sensorlängen von etwa 10 cm einer Winkelabweichung von etwa $0^\circ1$ und Auswirkungen auf die Neigungswerte von etwa $0''05$ (vgl. Abb. 4).

Verglichen mit der heute erreichbaren Neigungsmessgenauigkeit von etwa $0''04$ - $0''05$ (Hirt und Kahlmann 2004)

können die verbleibenden Restabweichungen durchaus eine Rolle im Fehlerhaushalt von Neigungsmessungen spielen. Für hochpräzise Neigungsmessungen mit zweiachsigen Neigungssensoren ist es daher empfehlenswert, das in diesem Beitrag vorgestellte Auswertemodell zu verwenden, sofern signifikante Abweichungen von der *Orthogonalitätsbedingung* und der *180°-Bedingung* nicht ausgeschlossen werden können.

Dank

Der Verfasser dankt dem Reviewer Wilfried Schwarz (Bauhaus Universität Weimar) herzlich für die konstruktiven Hinweise zum Manuskript und die Herleitung eines alternativen Lösungsansatzes, der diesen Beitrag vervollständigt hat.

Literatur

- Bürki, B., Müller, A., und Kahle, H.-G. (2004). DIADEM: The New Digital Astronomical Deflection Measuring System for High-precision Measurements of Deflections of the Vertical at ETH Zurich. Electronic Proc. IAG GGSM2004 Meeting in Porto, Portugal. Auch veröffentlicht in: CHGeoid 2003, Report 03-33 A (ed. U. Marti et al.), Bundesamt für Landestopographie (swisstopo), Wabern, Schweiz.
- Chesi, G. (1984). Entwicklung einer tragbaren Zenitkammer und ihr Einsatz im 47. Parallel. Dissertation an der Fakultät für Bauingenieurwesen der Technischen Universität Graz. Veröffentlicht in: Deutschen Geodätische Kommission C 287.
- Geiger, A. (1982): Entwicklung und Erprobung eines Präzisionsneigungstisches zur Kalibrierung geodätischer Instrumente. Schriftenreihe Studiengang Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, Heft 8.
- Hirt, C. (2004). Entwicklung und Erprobung eines digitalen Zenitkamerasystems für die hochpräzise Lotabweichungsbestimmung. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik an der Universität Hannover Nr. 253. URL: <http://edok01.tib.uni-hannover.de/edoks/e01dh04/393223965.pdf>.
- Hirt, C. und Kahlmann, T. (2004). Hochpräzise Neigungsmessung mit dem elektronischen Pendelneigungssensor HRTM. ZfV 129: 266-276.
- Ingensand, H. (1985). Ein Beitrag zur Entwicklung und Untersuchung hochgenauer elektronischer Neigungsmeßsysteme für kontinuierliche Messungen. Deutschen Geodätische Kommission C 308.
- Kahlmann, T., Hirt, C. und Ingensand, H. (2004). Hochpräzise Neigungsmessung mit dem elektronischen Einachsendelsystem HRTM. Ingenieurvermessung 2004 (Hrsg. H. Ingensand): 373-378, ETH Zürich.
- Schwarz, W. (Hrsg.) (1995). Vermessungsverfahren im Maschinen- und Anlagenbau. Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart.
- Schwarz, W. (2008). Persönliche Mitteilung.
- Witte, B. und Schmidt, H. (2004). Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen, 5. Auflage. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.

Anschrift des Verfassers:

Christian Hirt
Department Geomatik
HafenCity Universität Hamburg
Hebebrandstr. 1
22297 Hamburg
Tel: +49 40 52827 5323
Mail: christian.hirt@hcu-hamburg.de, chris.hirt@web.de

Zur Berücksichtigung von Scherung und Umschlagwinkel bei der Neigungsmessung mit zweiachsigen Neigungssensoren

Christian Hirt

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird ein neuer Auswertansatz für Neigungsmessungen mit zweiachsigen Neigungssensoren in zwei Lagen vorgestellt. Es werden Formeln zur strengen Berücksichtigung der Scherung zwischen den Sensorachsen hergeleitet sowie eine Modellbildung für Abweichungen vom 180°-Umschlagwinkel zwischen den beiden Messlagen vorgenommen. Für die Anwendung des vorgestellten Ansatzes ist die Bestimmung der Modellparameter Scherung und Umschlagwinkel notwendig. Das Modell kann für hochgenaue Neigungsmessungen mit zweiachsigen Neigungssensoren angewendet werden.

Summary

This paper deals with a new rigorous transformation model for (plumb line referred) tilt measurements using two-axial inclination sensors in two observation directions. The model accounts for deviations from the perpendicular orientation of the two sensor axes as well as for misalignment between both observation directions. The model requires numerical values both for the shearing between the sensor axes and the misalignment between both observation directions. Formulae are derived which can be applied for precise tilt measurements performed in two observation directions.

1 Einleitung

In der geodätischen Messtechnik wird unter dem Begriff der Neigung der Winkel verstanden, den eine Gerade (z.B. Stehachse eines Instrumentes oder Achse einer Maschine) mit der *Lotrichtung* bzw. mit der *Horizontalebene* im Messpunkt einschließt. Für die Bestimmung der Neigung einer Achse gegenüber der Horizontalebene kommen Neigungssensoren, z.B. Setzlibellen mit analoger Ablesung oder elektronische Neigungsmesser mit Pendel oder Flüssigkeitshorizont, zum Einsatz (siehe Schwarz 1995, S. 104 ff).

Da ein Neigungssensor bei der Bestimmung der Neigung n einer horizontalen Achse aufgrund einer immer vorhandenen, mehr oder weniger großen Nullpunktabweichung (Dejustierung) Δn nicht den Messwert 0 Bogensekunden anzeigen wird, führt man eine Neigungsmessung üblicherweise in zwei Lagen durch, die sich um 180° unterscheiden. Bezeichnet man die in Lage *I* und Lage *II* erfassten Messwerte mit n^I und n^{II} , so setzen sich diese – unter Vernachlässigung von zufälligen Messabweichungen – aus der (gesuchten) Neigung n und der Nullpunktabweichung Δn wie folgt zusammen:

$$n^I = n + \Delta n \quad n^{II} = -n + \Delta n. \quad (1)$$

Die Neigung n wird (in diesem Beispiel) in Lage *I* positiv und in Lage *II* negativ registriert; die Nullpunktabweichung Δn des Neigungssensors verfälscht dagegen in beiden Lagen

die gemessenen Neigungswerte n^I und n^{II} in gleicher Richtung. Jedem Geodäten ist bekannt, dass sich die gesuchte Neigung n der Achse als Hälfte der Differenz beider Neigungswerte n^I und n^{II} ergibt:

$$\frac{n^I - n^{II}}{2} = \frac{n + \Delta n - (-n + \Delta n)}{2} = n. \quad (2)$$

Für die Bestimmung der Nullpunktabweichung Δn gilt entsprechend:

$$\frac{n^I + n^{II}}{2} = \Delta n. \quad (3)$$

Besteht die Aufgabe darin, die Neigung einer Ebene gegenüber der Horizontalebene zu bestimmen, bzw. ist die räumliche Abweichung einer Instrumentenstehachse gegenüber der Lotrichtung gesucht, so werden Neigungswerte n_1 und n_2 in zwei Achsrichtungen 1 und 2 benötigt, die sich (azimutal) um 90° unterscheiden. Für die Messung werden in der Regel *zweiachsige Neigungssensoren* verwendet, die mit einer Dreheinrichtung für die Messung in zwei Lagen ausgestattet sind. Natürlich kann auch ein einachsiger Neigungssensor für die Bestimmung von Neigungswerten n_1 und n_2 durch Messung in zwei Achsrichtungen genutzt werden (z.B. Messsystem Rotlevel, siehe Schwarz 1995, S. 118).

Als Beispiel für den Einsatz von zweiachsigen Neigungssensoren sei die Erfassung der Stehachsneigung moderner Tachymeter (Witte und Schmidt 2004, S. 255 f) oder digitaler Zenitkamarasysteme (z.B. Hirt 2004, Bürki et al. 2004) genannt. Hier werden die Messelemente (Zenitdistanzen, Horizontalrichtungen bei Tachymetern bzw. Lotabweichungen bei Zenitkamarasystemen) durch rechnerische Korrektur der Stehachsneigung auf die Lotrichtung im Beobachtungspunkt bezogen. Bezeichnet man die mit einem zweiachsigen System in Lage *I* erfassten Neigungswerte mit n_1^I, n_2^I und in Lage *II* mit n_1^{II}, n_2^{II} , so ergeben sich die Neigungen in Achsrichtung 1 und 2 in Analogie zu Gl. (2):

$$n_1 = \frac{n_1^I - n_1^{II}}{2} \quad n_2 = \frac{n_2^I - n_2^{II}}{2}. \quad (4)$$

Die Anwendung von Gl. (4) setzt implizit voraus, dass

1. die beiden Achsrichtungen 1 und 2, in denen die Neigungswerte n_1^I, n_2^I, n_1^{II} und n_2^{II} erfasst werden, streng orthogonal zueinander sind (*Orthogonalitätsbedingung*) und
2. sich die Achsausrichtungen in Lage *I* und *II* streng um 180° voneinander unterscheiden (*180°-Bedingung*).

In der Praxis sind Abweichungen von den beiden Bedingungen häufig unvermeidbar. Als Ursache sei die endliche

Präzision genannt, mit der die Achsen 1 und 2 eines zweiachsigen Neigungsmesssystems zueinander orthogonal ausgerichtet (justiert) werden können. In der Folge weisen die beiden Achsen eine mehr oder weniger große Scherung auf. Beim Umschlag zwischen den Lagen *I* und *II* kann ein gewisses Spiel der Drehvorrichtung dazu führen, dass die 180°-Bedingung nicht exakt eingehalten wird. Für hohe Genauigkeitsforderungen ist es notwendig, Abweichungen von beiden Bedingungen rechnerisch zu berücksichtigen.

Der in diesem Beitrag vorgestellte Auswerteansatz modelliert einerseits Abweichungen von der 180°-Bedingung beim Umschlag zwischen den beiden Lagen, ohne Anforderungen an die Größe der Nullpunktabweichungen Δn_1 , Δn_2 der Neigungssensoren zu stellen. Andererseits werden Maßstabsfaktoren berücksichtigt, eine Scherung zwischen den Achsen der beiden Sensoren zugelassen und Formeln für die Rotation der Neigungswerte um beliebige Winkel angegeben, so dass das resultierende Auswertemodell affinen Charakter bekommt. Die Modellierung der Scherung von zweiachsigen Neigungsmesssystemen baut auf den Arbeiten von Hirt (2004) und Kahlmann et al. (2004) auf.

Ein in der Literatur bereits verfügbarer Ansatz (Chesi 1984, S. 57 f) zur Berücksichtigung von Abweichungen von der 180°-Bedingung kann nur unter der Voraussetzung angewendet werden, dass keine Nullpunktabweichungen Δn_1 , Δn_2 der Neigungssensoren vorliegen. Da diese Voraussetzung in der Praxis nur in den seltensten Fällen erfüllt ist, stellt die Lösung von Chesi einen Spezialfall dar und wird hier nicht weiter behandelt.

Der Fokus des vorliegenden Beitrages liegt auf der Berücksichtigung von Scherung und Umschlagwinkel im Rahmen der funktionalen Modellbildung (Abschnitt 2). Auf ein verfügbares Feldverfahren zur Bestimmung des Scher- und Umschlagwinkels wird in Abschnitt 3 im Zusammenhang mit der Neigungsmessung bei Zenitkamerabeobachtungen kurz eingegangen. Das vorgestellte Auswertemodell kann grundsätzlich für alle in der Praxis vorkommenden Fälle der hochgenauen Neigungsmessung mit zweiachsigen Neigungssensoren angewendet werden, sofern Kalibrierwerte für die Modellparameter Scherung und Umschlagwinkel vorliegen. Der vorgestellte Ansatz ist für solche Anwendungen relevant, bei denen geodätische Messgrößen (z.B. Zenitwinkel, Lotabweichungen) hochgenau auf die Lotrichtung bezogen werden müssen.

2 Das Auswertemodell

Nachfolgend werden Neigungswerte immer dann mit dem zusätzlichen Index $*$ versehen, wenn es sich um Größen handelt, die in einem streng orthogonalen Koordinatensystem definiert sind.

Ausgangspunkt ist ein zweiachsiges Neigungsmesssystem mit den Achsen 1 und 2, das zur Neigungsmessung genutzt werden soll. Die Aufgabe bestehe darin, die Neigung einer Ebene (z.B. Drehkreis eines Instrumentes) gegenüber der Horizontalebene im Beobachtungspunkt zu bestimmen. Beide Sensoren des Zweiachssystems weisen Nullpunktabweichungen Δn_1 (Sensor 1) und Δn_2 (Sensor 2) auf. Die

beiden Achsen, entlang derer die Neigungen erfasst werden, schließen einen Scherwinkel ε ein (Abb. 1), der i. Allg. von 90° abweicht. In Lage *I* liefert das Messsystem die Neigungswerte n_1^I , n_2^I . Nach einem rechtsläufigen Umschlag um den Winkel α , der i. Allg. ungleich 180° ist (siehe Abb. 2, links), befindet sich das System in Lage *II*. Die zugehörigen Neigungswerte werden mit n_1^{II} , n_2^{II} bezeichnet. Gesucht sind die Neigungen n_{1*} und n_{2*} . Diese sind von den Nullpunktabweichungen befreit und im streng orthogonalen Koordinatensystem in Lage *I* definiert (vgl. Abb. 2, rechts).

Im Abschnitt 2.1 werden Gleichungen hergeleitet, die die gesuchten Neigungen n_{1*} und n_{2*} in Abhängigkeit der gemessenen Neigungswerte n_1^I , n_2^I , n_1^{II} und n_2^{II} ausdrücken. Die Herleitung erfolgt in Vektorschreibweise über Scher- und Drehmatrizen. Die abgeleiteten expliziten Gleichungen eignen sich einerseits zur direkten Berechnung der gesuchten Neigungen, andererseits z.B. für Analysen zur Varianz-Kovarianzfortpflanzung, da die *Unbekannten als Funktion der Beobachtungen* ausgedrückt werden.

Demgegenüber werden im Abschnitt 2.2 Gleichungen zur Berechnung der gemessenen Neigungswerte n_1^I , n_2^I , n_1^{II} und n_2^{II} aus den gesuchten Neigungen n_{1*} und n_{2*} angegeben, wobei die Herleitungen ihren Ausgangspunkt in der Falllinie der geneigten Ebene haben. Die Formulierung erfolgt im Sinne *Beobachtungen als Funktion der Unbekannten*, kann jedoch auch durch Inversion zur Berechnung der Unbekannten verwendet werden. Die angegebenen Ausdrücke können für die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen verwendet werden. Die beiden vorgestellten Ansätze sind gleichwertig und ineinander überführbar.

2.1 Herleitung über Scher- und Drehmatrizen

Aus den vier gemessenen Neigungswerten n_1^I , n_2^I , n_1^{II} und n_2^{II} werden die Neigungen n_{1*} und n_{2*} nachfolgend berechnet, indem für beide Lagen der Einfluss der Scherung ε korrigiert wird (Abschnitt 2.1.2) und anschließend eine strenge Auswertung der Zweilagennmessung unter Berücksichtigung des Umschlagwinkels α erfolgt (Abschnitt 2.1.3). Optional kann vor der Scherkorrektur eine Maßstabskorrektur erfolgen oder abschließend eine Rotation der Neigungen n_{1*} und n_{2*} in ein beliebiges Zielkoordinatensystem mit Gl. (15) durchgeführt werden.

2.1.1 Maßstabskorrektur

Falls das zweiachsige Neigungsmesssystem "rohe" Messwerte $n_{1(ra w)}^I$, $n_{2(ra w)}^I$, $n_{1(ra w)}^{II}$ und $n_{2(ra w)}^{II}$ liefert (z.B. Spannungen, die Maß für die Neigung sind), so gelingt eine Umrechnung in Neigungswerte n_1^I , n_2^I , n_1^{II} und n_2^{II} sehr einfach durch Verwendung der Maßstabsfaktoren m_1 und m_2 :

$$\begin{aligned} n_1^I &= m_1 n_{1(ra w)}^I & n_2^I &= m_2 n_{2(ra w)}^I \\ n_1^{II} &= m_1 n_{1(ra w)}^{II} & n_2^{II} &= m_2 n_{2(ra w)}^{II} \end{aligned} \quad (5)$$

Die Maßstabsfaktoren m_1, m_2 werden üblicherweise auf einem Neigungstisch (Libellenprüfer) bestimmt, wobei i.d.R.

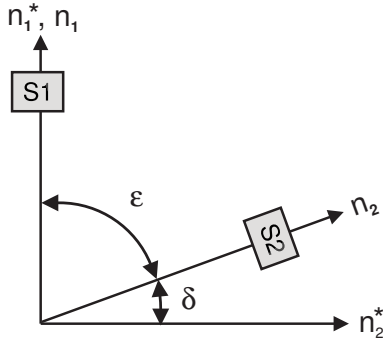


Abb. 1: Geschertes Koordinatensystem (n_1, n_2) und streng orthogonales Koordinatensystem (n_{1*}, n_{2*}) . Die Achsen des gescherten Systems zeigen an, in welche Richtung die beiden Sensoren S1 und S2 für Neigungen sensitiv sind.

ein linearer Zusammenhang zwischen Sensorsignal und Neigung angenommen wird. Beschreibungen zur genauen Maßstabskalibrierung von elektronischen Neigungssensoren werden beispielsweise von Geiger (1982), Ingensand (1985), Hirt (2004) sowie Hirt und Kahlmann (2004) gegeben. Es sei darauf hingewiesen, dass die Maßstabsfaktoren m_1, m_2 von der Querneigung der Neigungssensoren abhängen. Die Querneigung ist vor der Maßstabskalibrierung daher zu beseitigen.

2.1.2 Korrektur der Abweichung von der Orthogonalitätsbedingung (Scherkorrektur)

Für die Herleitung der Scherkorrektur sollen zunächst – unabhängig von der Messlage I oder II – zwei verschiedene Koordinatensysteme betrachtet werden. Abb. 1 zeigt das durch die Messrichtungen (Sensorachsen) der beiden Neigungssensoren 1 und 2 realisierte Koordinatensystem (n_1, n_2) . Beide Achsen kreuzen sich unter dem Scherwinkel ε . Als zweites Koordinatensystem wird ein (streng) orthogonales System (n_{1*}, n_{2*}) eingeführt, dessen Abszisse (n_{1*} -Achse) mit der Sensorachse 1 identisch ist. Man sieht, dass die Sensorachse 2 mit der n_{2*} -Achse des orthogonalen Systems einen Winkel von

$$\delta = 90^\circ - \varepsilon \quad (6)$$

umschließt. Eine Vorschrift für die Transformation der gescherten Neigungswerte (n_1, n_2) in streng orthogonale Neigungswerte (n_{1*}, n_{2*}) läßt sich leicht durch Umkehrung der Aufgabenstellung finden. Gegeben seien orthogonale Neigungswerte (n_{1*}, n_{2*}) , die in gescherte Neigungswerte (n_1, n_2) zu überführen sind. Die Rotation der orthogonalen Werte (n_{1*}, n_{2*}) um den Winkel δ (linksläufig, wenn δ positiv ist) liefert:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Wir können direkt den Ausdruck für n_2 ablesen:

$$n_2 = n_{2*} \cos \delta + n_{1*} \sin \delta \quad (8)$$

bzw. in Abhängigkeit des Scherwinkels ε :

$$n_2 = n_{2*} \sin \varepsilon + n_{1*} \cos \varepsilon. \quad (9)$$

Die Komponente n_1 darf natürlich nicht durch Rotation berechnet werden, da nur die n_2 -Achse bei dem gescherten Koordinatensystem rotiert wird. Es gilt vielmehr aufgrund der Identität der Abszissen beider Koordinatensysteme:

$$n_1 = n_{1*}. \quad (10)$$

Die Transformation der gescherten Neigungswerte (n_1, n_2) in orthogonale Werte (n_{1*}, n_{2*}) kann nun durch Umstellung der Gl. (9) und (10) nach n_{1*} und n_{2*} erfolgen.

Die erste Komponente n_{1*} ergibt sich direkt aus Gl. (10) und für die zweite Komponente n_{2*} findet sich durch Umstellung von Gl. (9)

$$n_{2*} = \frac{n_2}{\sin \varepsilon} - n_{1*} \frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} \quad (11)$$

und Einsetzen von Gl. (10) der Ausdruck (Hirt 2004, S. 114):

$$n_{2*} = \frac{n_2}{\sin \varepsilon} - \frac{n_1}{\tan \varepsilon}. \quad (12)$$

Die beiden Terme in Gl. (12) können geometrisch wie folgt interpretiert werden. Der Neigungssensor 2 registriert einen zu kleinen Anteil vom gesuchten Wert n_{2*} ; durch Division von n_2 mit $\sin \varepsilon$ erhält man den Neigungswert n_{2*} , den der Sensor 2 bei orthogonaler Ausrichtung messen würde. Mit dem zweiten Term kommt zum Ausdruck, dass aufgrund der Scherung ein Anteil von $1/\tan \varepsilon$ von n_1 registriert wird; n_{2*} wird von diesem aufgrund des negativen Vorzeichens vollständig befreit.

Unter Verwendung der Gl. (10) und (12) kann nun die Schermatrix \mathbf{S} aufgestellt werden, die die Transformation von gescherten Neigungswerten n_1^I, n_2^I in Lage I und n_1^{II}, n_2^{II} in Lage II – getrennt für beide Lagen – in streng orthogonale Neigungswerte $n_{1*}^I, n_{2*}^I, n_{1*}^{II}$, und n_{2*}^{II} erlaubt:

$$\mathbf{S}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{\tan \varepsilon} & \frac{1}{\sin \varepsilon} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} n_{1*}^I \\ n_{2*}^I \end{pmatrix} = \mathbf{S}(\varepsilon) \cdot \begin{pmatrix} n_1^I \\ n_2^I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n_{1*}^{II} \\ n_{2*}^{II} \end{pmatrix} = \mathbf{S}(\varepsilon) \cdot \begin{pmatrix} n_1^{II} \\ n_2^{II} \end{pmatrix}.$$

Die geometrische Situation vor und nach der Scherkorrektur ist in Abb. 2 verdeutlicht. Eine Diskussion zur Rolle der Nullpunktabweichungen $\Delta n_1, \Delta n_2$ bei der Schertransformation findet sich in Abschnitt 2.1.4.

2.1.3 Berücksichtigung der Abweichung von der 180°-Bedingung

Die Berechnung von (orthogonalen) Neigungswerten n_{1*} und n_{2*} aus den (um die Scherung korrigierten) Neigungswerten n_1^I, n_2^I, n_1^{II} , und n_2^{II} ist nicht trivial, wenn beim Umschlag zwischen Lage I und Lage II ein anderer Winkel α als 180° realisiert wird und die Neigungssensoren 1 und 2 Nullpunktabweichungen Δn_1 sowie Δn_2 aufweisen. In solchen Fällen gelingt es nicht, die gesuchten Neigungen mit der einfachen Gl. (4) zu berechnen.

Nachfolgend wird die Lösung für den *allgemeinen Fall der Neigungsmessung in zwei Lagen* hergeleitet, also für

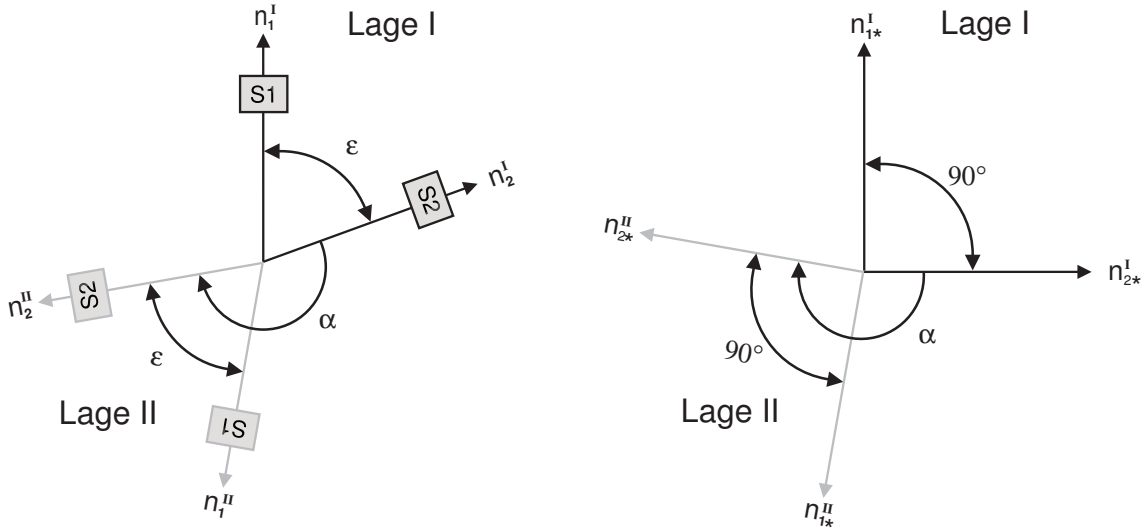


Abb. 2: Links: Geschertes Koordinatensystem in Lage I (schwarz) und II (grau). Rechts: Orthogonales Koordinatensystem in Lage I und II nach der Scherkorrektur. Die Koordinatensysteme in Lage I und Lage II sind jeweils um den Umschlagwinkel α verdreht.

Umschlagwinkel α , die von 180° abweichen dürfen und Neigungswerte mit beliebigen Nullpunktabweichungen Δn_1 , Δn_2 . Gegeben seien in Lage I die Neigungswerte n_{1*}^I, n_{2*}^I , die sich unter Vernachlässigung von zufälligen Messabweichungen aus den gesuchten Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) und den Nullpunktabweichungen $(\Delta n_{1*}, \Delta n_{2*})$ im orthogonalen System zusammensetzen:

$$\begin{pmatrix} n_{1*}^I \\ n_{2*}^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta n_{1*} \\ \Delta n_{2*} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

An dieser Stelle soll ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass sich die Nullpunktabweichungen $(\Delta n_{1*}, \Delta n_{2*})$ auf das streng orthogonale Koordinatensystem beziehen, in das die gescherten Neigungswerte inklusive der Nullpunktabweichungen der Neigungssensoren $(\Delta n_1, \Delta n_2)$ mit Gl. (13) transformiert wurden. Folglich sind Δn_{1*} und Δn_1 identisch, Δn_{2*} und Δn_2 weichen jedoch aufgrund der vorgenommenen Schertransformation voneinander ab, siehe auch Erläuterungen in Abschnitt 2.1.4.

Für Lage II kann man die Neigungswerte n_{1*}^{II}, n_{2*}^{II} ebenfalls in Abhängigkeit der Neigungen und Nullpunktabweichungen ausdrücken, wobei die Rotationsmatrix \mathbf{R}

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (15)$$

mit dem Umschlagwinkel α auf die Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) angewendet wird. Die Rotationsmatrix \mathbf{R} , wie sie in Gl. (15) angegeben ist, dreht bei positivem Argument α das Koordinatensystem im Uhrzeigersinn. Damit ist sie geeignet, das Koordinatensystem der Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) von Lage I rechtsläufig in Lage II zu drehen (vgl. Abb. 2, rechts). Es ergibt sich für die Neigungswerte n_{1*}^{II}, n_{2*}^{II} :

$$\begin{pmatrix} n_{1*}^{II} \\ n_{2*}^{II} \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta n_{1*} \\ \Delta n_{2*} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Anmerkung 1: Es ist entscheidend, dass die Rotationsmatrix \mathbf{R} nur auf die Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) angewendet werden darf, nicht jedoch auf die Nullpunktabweichungen $(\Delta n_{1*}, \Delta n_{2*})$. Die Nullpunktabweichungen verfälschen die gemessenen Neigungswerte in beiden Lagen in die gleiche Richtung und sind vom Umschlagwinkel α unabhängig.

Anmerkung 2: Man erkennt durch Einsetzen von $\alpha = 180^\circ$ in Gl. (16) leicht die in der Einleitung beschriebene Tatsache, dass die Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) in Lage II bei exakter Einhaltung der 180° -Bedingung mit negativem Vorzeichen registriert werden:

$$\begin{pmatrix} n_{1*}^{II} \\ n_{2*}^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_{1*} \\ -n_{2*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta n_{1*} \\ \Delta n_{2*} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Wir wollen nun die Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) in Abhängigkeit der vier Messwerte $n_{1*}^I, n_{2*}^I, n_{1*}^{II}, n_{2*}^{II}$ und des Umschlagwinkels α – der von 180° abweichen darf – berechnen. Dazu stellen wir Gl. (14) nach den Nullpunktabweichungen um:

$$\begin{pmatrix} \Delta n_{1*} \\ \Delta n_{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{1*}^I \\ n_{2*}^I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix} \quad (18)$$

und setzen diesen neuen Ausdruck in Gl. (16) ein:

$$\begin{pmatrix} n_{1*}^{II} \\ n_{2*}^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{1*} \cos \alpha + n_{2*} \sin \alpha \\ -n_{1*} \sin \alpha + n_{2*} \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{1*}^I \\ n_{2*}^I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Die Nullpunktabweichungen $(\Delta n_{1*}, \Delta n_{2*})$ sind – unter der Voraussetzung, dass sie sich zwischen dem Umschlag von Lage I nach Lage II nicht verändert haben – nun eliminiert. Die Terme in Gl. (19) können nachfolgend etwas umsortiert werden, so dass auf der linken Seite unsere vier gemessenen Neigungswerte stehen:

$$\begin{pmatrix} n_{1*}^{II} - n_{1*}^I \\ n_{2*}^{II} - n_{2*}^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{1*} \cos \alpha + n_{2*} \sin \alpha - n_{1*} \\ -n_{1*} \sin \alpha + n_{2*} \cos \alpha - n_{2*} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} n_{1*} \cos \alpha + n_{2*} \sin \alpha \\ -n_{1*} \sin \alpha + n_{2*} \cos \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos \alpha - 1) & + \sin \alpha \\ -\sin \alpha & (\cos \alpha - 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix}.$$

Nach Einführung der Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} a_1 &= n_{1*}^{II} - n_{1*}^I & a_2 &= n_{2*}^{II} - n_{2*}^I \\ b_1 &= \cos \alpha - 1 & b_2 &= -\sin \alpha \\ c_1 &= \sin \alpha & c_2 &= \cos \alpha - 1 \end{aligned} \quad (21)$$

erhält man ein einfaches lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

dessen Lösung sich sofort durch Linksmultiplikation mit der Inversen der Koeffizientenmatrix (b_1 bis c_2) ergibt:

$$\begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \begin{pmatrix} c_2 & -c_1 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Für die gesuchten Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) erhält man die wichtigen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} n_{1*} &= \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \\ &= \frac{(\cos \alpha - 1)(n_{1*}^{II} - n_{1*}^I) - \sin \alpha (n_{2*}^{II} - n_{2*}^I)}{2(1 - \cos \alpha)} \\ n_{2*} &= \frac{-b_2 a_1 + b_1 a_2}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \\ &= \frac{(\cos \alpha - 1)(n_{2*}^{II} - n_{2*}^I) + \sin \alpha (n_{1*}^{II} - n_{1*}^I)}{2(1 - \cos \alpha)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Mit Gl. (24) lassen sich Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) direkt als Funktion der vier Neigungswerte $n_{1*}^I, n_{2*}^I, n_{1*}^{II}$, und n_{2*}^{II} , die paarweise entlang orthogonaler Achsen gemessen wurden, und des Umschlagwinkels α berechnen, der von 180° abweichen darf. Die berechneten Neigungen (n_{1*}, n_{2*}) beziehen sich auf das orthogonale Koordinatensystem aus Lage I.

Es soll zum Ende dieses Abschnittes noch darauf hingewiesen werden, dass sich die in der Einleitung angegebene Gl. (4), die bei einem fehlerfreien Umschlag zwischen den beiden Lagen gültig ist, aus Gl. (24) durch Einsetzen von $\alpha = 180^\circ$ ergibt. Man erkennt auch, dass die Nenner in Gl. (24) den Wert 0 annehmen, wenn $\alpha = 0^\circ$ beträgt und die Gleichungen dann natürlich nicht lösbar sind.

2.1.4 Rolle der Nullpunktabweichungen im Auswertemodell

In der Einleitung wurde gesagt, dass das Auswertemodell keine Anforderungen an die Größe der Nullpunktabweichungen $\Delta n_1, \Delta n_2$ der Neigungssensoren stellt, d.h. das Modell bei unbekanntem Nullpunktabweichungen richtige Neigungen n_{1*}, n_{2*} liefert.

Die Nullpunktabweichungen $\Delta n_1, \Delta n_2$ der Neigungssensoren, die ja Bestandteil der gemessenen Neigungen n_{1*}^I, n_{2*}^I ,

n_{1*}^{II} und n_{2*}^{II} sind, werden durch Anwendung der Schermatrix \mathbf{S} (Gl. 13) auf die gemessenen Neigungen automatisch in streng orthogonale Nullpunktabweichungen $\Delta n_{1*}, \Delta n_{2*}$ umgewandelt:

$$\begin{aligned} \Delta n_{1*} &= \Delta n_1 \\ \Delta n_{2*} &= \frac{\Delta n_2}{\sin \varepsilon} - \frac{\Delta n_1}{\tan \varepsilon}. \end{aligned} \quad (25)$$

Aus Gl. (25) ist ersichtlich, dass Δn_{1*} direkt der Nullpunktabweichung vom ersten Neigungssensor entspricht, Δn_{2*} dagegen geometrisch nicht deutbar ist, da gemischte Terme (trigonometrische Funktionen und Anteil Δn_1) enthalten sind. Die Komponenten $\Delta n_{1*}, \Delta n_{2*}$ sind – mit gleichem Vorzeichen – sowohl in den streng orthogonalen Neigungswerten der ersten Lage n_{1*}^I, n_{2*}^I , als auch in denen der zweiten Lage (n_{1*}^{II}, n_{2*}^{II}) enthalten.

Bei der Berechnung der Neigungswerte werden die Nullpunktabweichungen $\Delta n_{1*}, \Delta n_{2*}$ in Gl. (21) durch Differenzbildung der orthogonalen Neigungswerte aus der ersten und zweiten Lage (Hilfsgrößen a_1 und a_2) streng eliminiert. Daher kann das Auswertemodell auch bei unbekanntem Nullpunktabweichungen problemlos angewendet werden.

Besteht z.B. für Analysezwecke die Aufgabe, die Nullpunktabweichungen $\Delta n_1, \Delta n_2$ der Neigungssensoren zu berechnen, so sind zuerst die Nullpunktabweichungen $\Delta n_{1*}, \Delta n_{2*}$ im orthogonalen System mit Gl. (18) zu berechnen und dann in Nullpunktabweichungen im gescherten Koordinatensystem (durch die Neigungssensoren realisiert) zu transformieren. Dies geschieht in Anlehnung an Gl. (9) und (10):

$$\begin{aligned} \Delta n_1 &= \Delta n_{1*} \\ \Delta n_2 &= \Delta n_{2*} \sin \varepsilon + \Delta n_{1*} \cos \varepsilon. \end{aligned} \quad (26)$$

2.2 Herleitung über die Falllinie

Jede geneigte Ebene hat eine Falllinie, in der eine maximale Neigung n_{max} gemessen werden kann. Man erhält den Betrag n_{max} in Abhängigkeit der Neigungen (n_{1*}, n_{2*}):

$$n_{max} = \sqrt{n_{1*}^2 + n_{2*}^2}. \quad (27)$$

Die Richtung ω der Falllinie, bezogen auf die n_{1*} -Achse, ergibt sich durch

$$\omega = \arctan \left(\frac{n_{2*}}{n_{1*}} \right). \quad (28)$$

Die beiden Größen n_{max} und ω entsprechen der Darstellung der Neigung in polaren Koordinaten (vgl. Abb. 3). Die Neigung n_γ in einer beliebigen Richtung kann über

$$n_\gamma = n_{max} \cos \gamma \quad (29)$$

berechnet werden, wobei der Winkel γ auf die Richtung der Falllinie bezogen ist. Setzt man z.B. für γ den Winkel ω ein, so erhält man die Neigung in Richtung der n_{1*} -Achse und für den Winkel $90^\circ - \omega$ entsprechend die Neigung in Richtung der n_{2*} -Achse. Es ergeben sich die (kartesischen) Neigungskomponenten (n_{1*}, n_{2*}) als Funktion der polaren Elemente n_{max} und ω :

$$n_{1*} = n_{max} \cos \omega \quad n_{2*} = n_{max} \sin \omega. \quad (30)$$

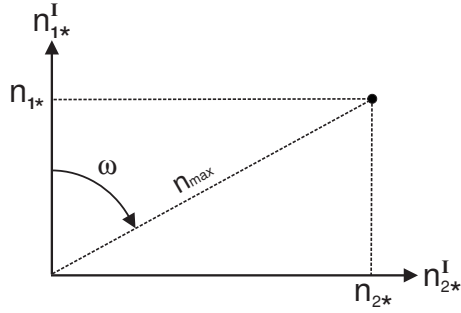


Abb. 3: Neigung einer Ebene in polaren Koordinaten (n_{max} und ω) und kartesischen Koordinaten (n_{1*} , n_{2*})

Ausgehend von Gl. (29) ist es möglich, die registrierten Neigungswerte n_1^I , n_2^I , n_1^{II} und n_2^{II} in Richtung der gesicherten Sensorachsen in Lage I und Lage II (vgl. Abb. 2 links) in Abhängigkeit der Winkel ω , α und ε sowie der Nullpunktabweichungen Δn_1 und Δn_2 zu konstruieren (Schwarz 2008):

$$\begin{aligned} n_1^I &= n_{max} \cos(-\omega) + \Delta n_1 & (31) \\ n_2^I &= n_{max} \cos(-\omega + \varepsilon) + \Delta n_2 \\ n_1^{II} &= n_{max} \cos(-\omega + \alpha) + \Delta n_1 \\ n_2^{II} &= n_{max} \cos(-\omega + \alpha + \varepsilon) + \Delta n_2. \end{aligned}$$

Auf das gleiche Ergebnis kommt man auch durch Anwendung der Rotationsmatrix (Gl. 16) mit dem Winkel $-\alpha$ und der inversen Schertransformation (Gl. 9) auf die Neigungen (n_{1*} , n_{2*}) sowie anschließender Addition der Nullpunktabweichungen Δn_1 und Δn_2 .

In dem zunächst nichtlinearen Gleichungssystem (31) sind die Größen n_{max} , ω , Δn_1 und Δn_2 Unbekannte und n_1^I , n_2^I , n_1^{II} und n_2^{II} die Beobachtungen. Eine Linearisierung von Gl. (31) gelingt durch Anwendung des Additionstheorems für die cos-Funktion (Schwarz 2008)

$$\begin{aligned} n_1^I &= n_{max} \cos \omega + \Delta n_1 & (32) \\ n_2^I &= n_{max} \cos \omega \cos \varepsilon + n_{max} \sin \omega \sin \varepsilon + \Delta n_2 \\ n_1^{II} &= n_{max} \cos \omega \cos \alpha + n_{max} \sin \omega \sin \alpha + \Delta n_1 \\ n_2^{II} &= n_{max} \cos \omega \cos(\alpha + \varepsilon) + \\ & n_{max} \sin \omega \sin(\alpha + \varepsilon) + \Delta n_2 \end{aligned}$$

und anschließende Substitution mit den Beziehungen aus Gl. (30)

$$\begin{aligned} n_1^I &= n_{1*} + \Delta n_1 & (33) \\ n_2^I &= n_{1*} \cos \varepsilon + n_{2*} \sin \varepsilon + \Delta n_2 \\ n_1^{II} &= n_{1*} \cos \alpha + n_{2*} \sin \alpha + \Delta n_1 \\ n_2^{II} &= n_{1*} \cos(\alpha + \varepsilon) + n_{2*} \sin(\alpha + \varepsilon) + \Delta n_2. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ergibt sich schließlich:

$$\begin{pmatrix} n_1^I \\ n_2^I \\ n_1^{II} \\ n_2^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos \varepsilon & \sin \varepsilon & 0 & 1 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 1 & 0 \\ \cos(\alpha + \varepsilon) & \sin(\alpha + \varepsilon) & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \\ \Delta n_1 \\ \Delta n_2 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Dieses lineare Gleichungssystem drückt die beobachteten Neigungswerte n_1^I , n_2^I , n_1^{II} und n_2^{II} in Abhängigkeit der unbekanntenen Neigungen n_{1*} und n_{2*} (im orthogonalen Koordinatensystem in Lage I) und den unbekanntenen Nullpunktabweichungen Δn_1 und Δn_2 der Neigungssensoren aus. Durch Linksmultiplikation von (34) mit der inversen Koeffizientenmatrix können die Unbekannten berechnet werden. Eine manuelle Auflösung von (34) führt nach einigen Umformungen, die hier nicht dargestellt werden sollen, auf die im Abschnitt 2.1 dargestellte funktionale Modellierung, bei der die Unbekannten als Funktion der Beobachtungen ausgedrückt wurden. Beide Ansätze sind somit zueinander äquivalent.

2.3 Zahlenbeispiel

Die vorgestellte strenge Auswerteprozedur für Neigungsmessungen in zwei Lagen soll mit einem einfachen Zahlenbeispiel verdeutlicht werden. Gegeben seien Neigungswerte, die mit einem zweiachsigen Neigungsmesssystem in zwei Lagen erfasst wurden und bereits maßstabskorrigiert sind:

$$\begin{aligned} n_1^I &= 10'' & n_2^I &= 20'' \\ n_1^{II} &= -30'' & n_2^{II} &= -40''. \end{aligned}$$

Die beiden Achsen 1 und 2 schließen einen Scherwinkel

$$\varepsilon = 89^\circ$$

ein und der Umschlagwinkel zwischen den beiden Lagen I und II beträgt

$$\alpha = 179^\circ.$$

Beim ersten Ansatz (Abschnitt 2.1) werden die Neigungswerte n_1^I , n_2^I in Lage I und n_1^{II} , n_2^{II} im gesicherten Koordinatensystem mit Gl. (13) – getrennt für beide Lagen – in Neigungswerte n_{1*}^I , n_{2*}^I , n_{1*}^{II} und n_{2*}^{II} im streng orthogonalen Koordinatensystem transformiert. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} n_{1*}^I &= 10'' & n_{2*}^I &= 19''8285 \\ n_{1*}^{II} &= -30'' & n_{2*}^{II} &= -39''4824. \end{aligned}$$

Mit Gl. (21) werden die Hilfsgrößen a_1 bis c_2 berechnet:

$$\begin{aligned} a_1 &= -40'' & b_1 &= -1.9998 & c_1 &= 0.0175 \\ a_2 &= -59.3109 & b_2 &= -0.0175 & c_2 &= -1.9998. \end{aligned}$$

Für die gesuchten Neigungen (n_{1*} , n_{2*}) findet sich mit Gl. (24):

$$n_{1*} = 20''2588 \quad n_{2*} = 29''4809.$$

Die Nullpunktabweichungen Δn_1 und Δn_2 der beiden Sensoren können über Gl. (26) berechnet werden:

$$\Delta n_1 = -10''2588 \quad \Delta n_2 = -9''8300.$$

Eine alternative Lösung der Aufgabe ist durch Auflösung von Gl. (34) nach den Unbekannten möglich (vgl. Abschnitt 2.2). Die Koeffizientenmatrix aus Gl. (34) lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0175 & 0.9998 & 0 & 1 \\ -0.9998 & 0.0175 & 1 & 0 \\ -0.0349 & -0.9994 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

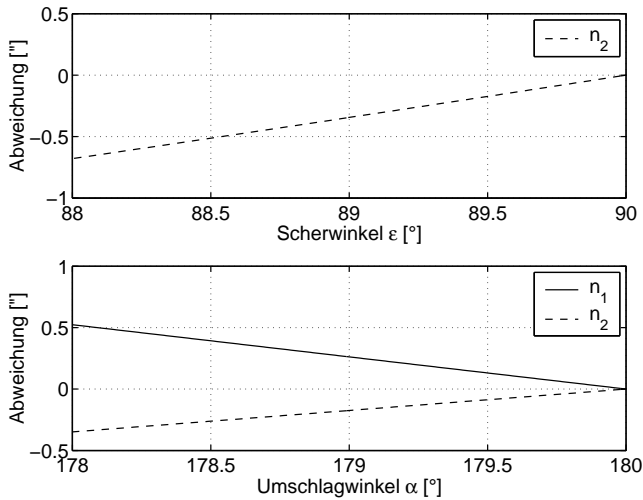


Abb. 4: Abweichungen zwischen dem konventionellen Auswertansatz und dem neuen Auswertmodell bei der Berechnung von Neigungen. Oben: Einfluss des Scherwinkels ε . Unten: Einfluss des Umschlagwinkels α . Bei der oberen Grafik wurde der Umschlagwinkel $\alpha = 180^\circ$ gesetzt und der Scherwinkel ε variiert. Für die erste Neigungskomponente n_1 ist die Abweichung immer 0. Bei der unteren Grafik wurde dagegen der Scherwinkel $\varepsilon = 90^\circ$ gesetzt und α variiert. Für beide Berechnungen wurden Nullpunktabweichungen von $-10''$ (Sensor 1) und $-10''$ (Sensor 2) sowie Neigungswerte von $+20''$ (Sensor 1) und $+30''$ (Sensor 2) angesetzt. Die gezeigten Abweichungen überlagern sich additiv.

Für die Inverse der Koeffizientenmatrix ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0.4999 & 0.0044 & -0.4999 & -0.0044 \\ -0.0131 & 0.5001 & 0.0131 & -0.5001 \\ 0.5001 & -0.0044 & 0.4999 & 0.0044 \\ 0.0044 & 0.4999 & -0.0044 & 0.5001 \end{pmatrix} \quad (35)$$

und für den Unbekanntenvektor durch Linksmultiplikation des Vektors der beobachteten Neigungswerte mit (35):

$$\begin{pmatrix} n_{1*} \\ n_{2*} \\ \Delta n_1 \\ \Delta n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20''2588 \\ 29''4809 \\ -10''2588 \\ -9''8300 \end{pmatrix}.$$

Die Werte für die Unbekannten stimmen bei beiden Ansätzen überein. Wendet man zur Berechnung der Neigungen dagegen den konventionellen Ansatz (Gl. 4) an, bei dem weder Scherung der Sensorachsen noch Abweichungen von der 180° -Bedingung berücksichtigt werden, so erhält man $20''$ für die Neigung n_1 und $30''$ für n_2 . Es zeigen sich bei dem gewählten Beispiel Abweichungen zwischen dem strengen Auswertmodell und dem konventionellen Ansatz von etwa $0''25$ sowie $0''5$, die bei hohen Genauigkeitsanforderungen nicht vernachlässigbar sind.

3 Diskussion

Mit dem in diesem Beitrag vorgestellten Auswertmodell lassen sich Neigungsmessungen mit zweiachsigen Messsystemen

streng auswerten. Der Modellansatz berücksichtigt einerseits den Scherwinkel ε zwischen den Sensorachsen. Andererseits werden Abweichungen von der 180° -Bedingung beim Umschlag zwischen den beiden Lagen zugelassen und rechnerisch unter Verwendung des Umschlagwinkels α korrigiert.

Es wurden zwei unterschiedliche Herleitungen gezeigt, die beide zu äquivalenten Ergebnissen führen. Beim ersten Ansatz (Abschnitt 2.1) wurde zuerst der Schereinfluss korrigiert (Gl. 24) und danach der Einfluss des Umschlagwinkels (Gl. 13). Beim zweiten Ansatz (Abschnitt 2.2), der von Schwarz (2008) vorgeschlagen wurde, werden beide Einflüsse in einem Schritt korrigiert, eine Lösung ergibt sich durch Inversion der Koeffizientenmatrix in Gl. (34). Während der erste Ansatz im Sinne Unbekannte als Funktion der Beobachtungen formuliert ist, drückt der zweite Ansatz die Beobachtungen als Funktion der Unbekannten aus.

Vor der praktischen Anwendung des neuen Modellansatzes ist es notwendig, Werte für die beiden Parameter ε und α zu ermitteln. Dies kann grundsätzlich über geeignete Kalibrierverfahren (Scherwinkel ε) oder z.B. über die Nutzung von Messwertgebern (Umschlagwinkel α) geschehen. Auf die Entwicklung eines Laborverfahrens für die Bestimmung der Modellparameter ε und α wird im Rahmen dieses Beitrages nicht eingegangen; ein Feldverfahren zur Kalibrierung ist dagegen bei Zenitkamerasystemen schon verfügbar und getestet.

Das vorgestellte Auswertmodell wird seit 2005 routinemäßig für die Auswertung von hochgenauen Neigungsmessungen verwendet, die im Rahmen der Lotrichtungs- und Lotabweichungsbestimmung mit dem Hannoverschen Zenitkamerasystem (Hirt 2004) durchgeführt werden. Die Bestimmung des Scherwinkels ε erfolgt bei dieser Anwendung durch ein spezielles Kalibrierverfahren, der zälestischen Kalibrierung. Dabei wird der Parameter ε aus einer Vielzahl von Neigungsmessungen, die astrometrisch ermittelten Neigungen gegenübergestellt werden, durch Ausgleichung ermittelt. Eine detaillierte Beschreibung des zälestischen Kalibrierverfahrens findet sich in Hirt (2004), S. 108 ff. Der Umschlagwinkel α , der zwischen den Lagen *I* und *II* bei Zenitkamera-beobachtungen realisiert wird, steht direkt als Differenz von astronomischen Azimuten zur Verfügung, die für beide Lagen durch astrometrische Auswertung ermittelt werden.

Abb. 4 zeigt die Abweichungen, die sich zwischen dem konventionellen Auswertansatz (Gl. 4) und dem neu entwickelten Auswertmodell (Abschnitt 2) bei der Berechnung von Neigungen bei verschiedenen Scherwinkeln ε und Umschlagwinkeln α ergeben. Die Abweichungen können – je nach Größe der Neigungswerte und der Parameter ε und α – bis in der Größenordnung von $1''$ liegen (vgl. auch Zahlenbeispiel im Abschnitt 2.3), sofern Scherung und Umschlag nicht mechanisch justierbar sind. Bei Verfügbarkeit von Justiervorrichtungen sollte dagegen eine laterale Justiergenauigkeit von wenigen 0.1 mm und besser erreichbar sein. Dies entspricht bei Sensorlängen von etwa 10 cm einer Winkelabweichung von etwa $0^\circ1$ und Auswirkungen auf die Neigungswerte von etwa $0''05$ (vgl. Abb. 4).

Verglichen mit der heute erreichbaren Neigungsmessgenauigkeit von etwa $0''04$ - $0''05$ (Hirt und Kahlmann 2004)

können die verbleibenden Restabweichungen durchaus eine Rolle im Fehlerhaushalt von Neigungsmessungen spielen. Für hochpräzise Neigungsmessungen mit zweiachsigen Neigungssensoren ist es daher empfehlenswert, das in diesem Beitrag vorgestellte Auswertemodell zu verwenden, sofern signifikante Abweichungen von der *Orthogonalitätsbedingung* und der *180°-Bedingung* nicht ausgeschlossen werden können.

Dank

Der Verfasser dankt dem Reviewer Wilfried Schwarz (Bauhaus Universität Weimar) herzlich für die konstruktiven Hinweise zum Manuskript und die Herleitung eines alternativen Lösungsansatzes, der diesen Beitrag vervollständigt hat.

Literatur

- Bürki, B., Müller, A., und Kahle, H.-G. (2004). DIADEM: The New Digital Astronomical Deflection Measuring System for High-precision Measurements of Deflections of the Vertical at ETH Zurich. Electronic Proc. IAGG GSM2004 Meeting in Porto, Portugal. Auch veröffentlicht in: CHGeoid 2003, Report 03-33 A (ed. U. Marti et al.), Bundesamt für Landestopographie (swisstopo), Wabern, Schweiz.
- Chesi, G. (1984). Entwicklung einer tragbaren Zenitkammer und ihr Einsatz im 47. Parallel. Dissertation an der Fakultät für Bauingenieurwesen der Technischen Universität Graz. Veröffentlicht in: Deutschen Geodätische Kommission C 287.
- Geiger, A. (1982): Entwicklung und Erprobung eines Präzisionsneigungstisches zur Kalibrierung geodätischer Instrumente. Schriftenreihe Studiengang Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, Heft 8.
- Hirt, C. (2004). Entwicklung und Erprobung eines digitalen Zenitkammersystems für die hochpräzise Lotabweichungsbestimmung. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik an der Universität Hannover Nr. 253. URL: <http://edok01.tib.uni-hannover.de/edoks/e01dh04/393223965.pdf>.
- Hirt, C. und Kahlmann, T. (2004). Hochpräzise Neigungsmessung mit dem elektronischen Pendelneigungssensor HRTM. ZfV 129: 266-276.
- Ingensand, H. (1985). Ein Beitrag zur Entwicklung und Untersuchung hochgenauer elektronischer Neigungsmeßsysteme für kontinuierliche Messungen. Deutschen Geodätische Kommission C 308.
- Kahlmann, T., Hirt, C. und Ingensand, H. (2004). Hochpräzise Neigungsmessung mit dem elektronischen Einachsendelsystem HRTM. Ingenieurvermessung 2004 (Hrsg. H. Ingensand): 373-378, ETH Zürich.
- Schwarz, W. (Hrsg.) (1995). Vermessungsverfahren im Maschinen- und Anlagenbau. Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart.
- Schwarz, W. (2008). Persönliche Mitteilung.
- Witte, B. und Schmidt, H. (2004). Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen, 5. Auflage. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.

Anschrift des Verfassers:

Christian Hirt
Department Geomatik
HafenCity Universität Hamburg
Hebebrandstr. 1
22297 Hamburg
Tel: +49 40 52827 5323
Mail: christian.hirt@hcu-hamburg.de, chris.hirt@web.de